Exercice 1.

Supposons f continue et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = a + bx - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = a + bx - x \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées respectives $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto x f(x)$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) = b - \int_0^x f(t)\,dt - x f(x) + x f(x) = b + \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout x réel.

Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f''(x) = -f(x)$.

Puis d'après $f(x) = a + bx - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$ et $f'(x) = b - \int_0^x f(t)\,dt$ on a $f(0) = a$ $f'(0) = b$.

f est bien solution de $y'' + y = 0$ $\quad y(0) = a$ $\quad y'(0) = b$

—

Réciproquement si f, deux fois dérivable vérifie $f'' + f = 0$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et de plus $f(0) = a$ $f'(0) = b$, alors, en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t) f''(t)\,dt = a + bx - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt.$$

q.e.d.

Exercice 2. $\forall x \in]0,+\infty[$. $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant. la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est donc convergente et f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Posons $f_n : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. On vient de voir que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{*+}$

De plus chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n} \ln n}{n^x}$.

Fixons $x > 0$ et soit $\varphi_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ $\varphi'_x(t) = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$, donc φ est décroissante sur $[e^{\frac{1}{x}},+\infty[$.

Soit $a > 0$

$\forall x \in [a,+\infty[$ $\forall n \geq \lceil e^{\frac{1}{a}} \rceil$ $|f'_{n+1}(x)| \leq |f'_n(x)|$, donc $\sum_{n\geq \lceil e^{\frac{1}{a}}\rceil} f'_n$ est une série alternée qui vérifie le critère de Leibniz, en particulier elle converge et

On a donc $\forall x \in [a,+\infty[$ $\forall n \geq \lceil e^{\frac{1}{a}} \rceil$ $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$.

$\forall n \geq \lceil e^{\frac{1}{a}} \rceil$ $\sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)\right| = 0$.

La série $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$. donc en particulier sur tout segment de $]0,+\infty[$. Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$.

Exercice 3 $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout z de $D(0,R)$ et pour un tel z $\sum_{n\geq 0} |a_n|\,|z|^n$ converge.

1) $\forall t \in [0, 2\pi]$ $\quad f(re^{it})e^{-int} = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{a_p r^p e^{i(p-n)t}}_{u_p(t)}$. Chaque fonction u_p est continue sur $[0,2\pi]$, $\forall t \in [0,2\pi]$ $|u_p(t)| \leq |a_p| r^p$ et $\sum_{p\geq 0} |a_p| r^p$ converge car $r < R$. La série de fonctions continues sur le segment $[0,2\pi]$, $\sum_{p\geq 0} u_p$ converge normalement donc uniformément.

On peut permuter intégration et sommation. Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}dt$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$, donc finalement $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = a_n$.

2) La technique est la même. On écrit $|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n r^n e^{-int} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$. Les deux séries étant absolument convergentes, on peut effectuer leur produit de Cauchy

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{p=0}^{n} \bar{a}_p a_{n-p} r^n e^{i(n-2p)t}}_{v_n(t)}.$$

Avec $|v_n(t)| \leq \sum_{p=0}^{n} |a_p|\,|a_{n-p}|\, r^n$.

Or $\sum_{n\geq 0} \sum_{p=0}^{n} |a_p|\,|a_{n-p}|\, r^n$ converge. (produit de Cauchy des séries à termes positifs convergentes $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$). On

On est à nouveau en présence d'une convergence normale sur un segment. On peut permuter intégration et sommation. et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \bar{a}_p a_{n-p} r^n \delta_{n-2p,0} = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|^2 r^{2p}$

Exercice 4 . On effectue le changement de variable $t = u^n$ ($u \in]0,1[$). On remarquera que l'intégrale est bien définie car $u \mapsto n \ln(1+u^n)$ est continue (et positive) sur le segment $[0,1]$

$$I_n = \int_0^1 n \ln(1+u^n)\,du = \int_{]0,1[} n \ln(1+u^n)\,du = \underline{\int_{]0,1[} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}\, t^{\frac{1}{n}}}_{g_n(t)}\,dt} = I_n$$

$\forall t \in]0,1[\quad \lim_{n \to +\infty} g_n(t) = g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $\forall t \in]0,1[\quad |g_n(t)| \leq 1 \times 1 = \varphi(t)$ où φ est intégrable sur $]0,1[$. (On a utilisé $\forall t \in]0,1[\quad 0 \leq \ln(1+t) \leq t$ et $t^{1/n} \leq 1$)

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on en déduit.

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_{]0,1[} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt} = \int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}}_{f_n(t)}\,dt$$

. Chaque f_n est continue sur $]0,1[$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers g qui est continue sur $]0,1[$ et finalement $\int_{]0,1[} |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^2}$ donc $\underline{\sum_{n \geq 1} \int_{]0,1[} |f_n(t)|\,dt}$ converge d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$.

On peut donc permuter intégration et sommation et

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n \ln(1+u^n)\,du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}} \left(= \frac{\pi^2}{12}\right)$$

Exercice 5 Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\delta_{i+1,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

$AN = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\delta_{k+1,j}\right) = \left(a_{i,j-1}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, avec la convention $a_{i,0} = 0$ pour tout i : $1\leq i\leq n$

$NA = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{i+1,k}\, a_{k,j}\right) = \left(a_{i+1,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ avec la convention $a_{n+1,j} = 0$ pour tout j $1\leq j\leq n$.

On aura $AN = NA$ ssi $\underline{\forall i,j \quad a_{i,j-1} = a_{i+1,j}}$. (ou $a_{i-1,j-1} = a_{i,j}$)

On en déduit si $j \geq i$ $a_{i,j} = a_{1,j-i+1}$

si $j < i$ $a_{i,j} = 0$

Visuellement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \\ & & & a_{1,2} \\ 0 & & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Exercice 6. 1) Soit λ une valeur propre de $\cancel{f}$. et $E_\lambda(\cancel{f})$ le sous-espace propre associé.

Soit x dans $E_\lambda(\cancel{f})$ $\quad \cancel{f}(x)=\lambda x \quad g(f(x))=\lambda g(x)$ mais $g(f(x))=f(g(x))$ donc.

$f(g(x))=\lambda(g(x))$ et $g(x)$ est dans $E_\lambda(f)$.

$E_\lambda(f)$ est donc stable par g.

2) Le corps de base est $\mathbb{C}$ et E est non réduit à $\{0\}$, f possède donc au moins une valeur propre λ et son sous-espace propre $E_\lambda(f)$ non réduit à 0.

$E_\lambda(f)$ est stable par g. Soit $\tilde{g}$ l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(U)$

$E_\lambda(f)\neq\{0\}$ et le corps de base est $\mathbb{C}$, donc $\tilde{g}$ possède au moins une valeur propre μ et un vecteur propre x_0.

$\exists x_0 \in E_\lambda(f) \quad g(x_0)=\tilde{g}(x_0)=\mu x_0$ et $f(x_0)=\lambda x_0$

x_0 est bien un vecteur propre commun à f et g.

Exercice 7 Supposons $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ diagonalisable, il existe donc P scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$.

Or $B^2 = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ puis par récurrence $\forall k \in \mathbb{N} \quad B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

Donc si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ $P(B) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} a_k A^k & \sum_{k=0}^{d} k a_k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} = P(B)$

(Rq : bien refaire le calcul précédent, ne pas parachuter le résultat final sans justification)

On a donc $P(A) = 0$ $AP'(A) = 0$

Or P et P' sont premiers entre eux car scindés à racines simples.

D'après Bézout il existe donc U et V dans $K[X]$ tels que

$PU + P'V = 1$.

Donc $P(A)U(A) + P'(A)V(A) = I_n$ or $P(A) = 0$ donc $P'(A)V(A) = I_n$.

$P'(A)$ est donc inversible et par conséquent

$AP'(A) = 0 \Rightarrow A = 0$

Finalement : B diagonalisable $\Rightarrow A = 0$ (et la réciproque est triviale)

Exercice 8. 1) M possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable

$M = PDP^{-1}$ $\quad P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$

Soit N telle que $MN = NM$. On écrit $N = PN'P^{-1}$.

$PDP^{-1}PN'P^{-1} = PN'P^{-1}PDP^{-1}$ $\quad PDN'P^{-1} = PN'DP^{-1}$ puis $DN' = N'D$.

Si $N' = (n'_{i,j})$ alors $DN' = (\lambda_i n'_{i,j})$ et $N'D = (n'_{i,j}\lambda_j)$.

Donc $N'D = DN'$ équivaut à $\forall i,j \ (\lambda_i - \lambda_j) n'_{i,j} = 0$ soit $\forall i \neq j \ n'_{i,j} = 0$

$N' = D'$ est donc diagonale. et N est diagonalisable.

2) Notons $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Soit $L = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)}$ le polynôme

d'interpolation de Lagrange. $\forall i \ L(\lambda_i) = \mu_i$, donc $L(D) = D'$

Or $\begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \\ A \mapsto PAP^{-1} \end{array}$ est un automorphisme d'algèbre donc

$L(M) = L(PDP^{-1}) = P(L(D))P^{-1} = PD'P^{-1} = N$.

N est un polynôme en M. (La réciproque est claire si $N = Q(M)$ alors $NM = MN$)

Exercice 9 1) $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots \\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots \\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et ces deux vecteurs sont clairement indépendants

donc $\underline{rg(M) = 2}$.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 0 \\ 1 & & \vdots & \vdots \\ 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 1 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & n-1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{tr(M^2) = 2(n-1)}$

3) $rg(M) = 2$ donc 0 est valeur propre de M avec la multiplicité $n-2$ au moins.

$\chi_M = X^{n-2}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.

Les valeurs propres de M^2 sont 0 λ_1^2 et λ_2^2 (En général, trigonaliser M. Ici M qui est symétrique réelle est même diagonalisable!)

Or a $tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + (n-2).0$

$tr(M^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (n-2).0$

Soit $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ $\lambda_1 = -\lambda_2$ $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{2(n-1)}{\cancel{2}}}$.

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(n-1)$

Les valeurs propres de M sont donc.

0 de multiplicité $n-2$

$\sqrt{n-1}$ de multiplicité 1

$-\sqrt{n-1}$ de multiplicité 1.

Exercice 10 Etudions d'abord f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5+x-2$ $f'(x) = 5x^4+1 > 0$ donc f est strictement croissante. L'équation $f(x)=0$ possède au plus une solution, or $f(1)=0$ donc $f(x)=0 \iff x=1$.

1) Si A est symétrique et dans $M_n(\mathbb{R})$ elle est diagonalisable.
Si de plus $f(A)=0$ alors toute valeur propre λ de A vérifie $f(\lambda)=0$.
Donc A est diagonalisable et $Sp(A)=\{1\}$ donc $A=I_n$ (Réciproque évidente.)

2) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $f(A)=0$. (et donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$)
Soit $g(x) = (-1)^n \chi_A(x) = \det(A - xI_n)$. $= (-1)^n x^n + \dots$
La seule valeur propre réelle possible de A est 1, donc si g s'annule sur $\mathbb{R}$ c'est en 1.
car les racines de g sont les valeurs propres de A.
Or g est continue sur $\mathbb{R}$, donc g garde un signe constant au sens strict sur $]-\infty, 1[$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, donc $\forall x \in]-\infty, 1[$ $g(x) > 0$
en particulier $\det A = g(0) > 0$.

Exercice 11   1) $\chi_B = \det\begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ -A & XI_n \end{pmatrix}$. On calcule dans $M_n(\mathbb{C}(X))$.

$$\begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ -A & XI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{X} I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & 0 \\ -A & XI_n - \frac{1}{X}A \end{pmatrix}$$ or $\det\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{X} I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 0$

Donc $\chi_B = \det(XI_n)\det\left(XI_n - \frac{1}{X}A\right) = \det(X^2 I_n - A) = \underline{\chi_A(X^2) = \chi_B(X)}$

2) λ est valeur propre de B ssi λ^2 est valeur propre de A d'après la question 1)

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in E_\lambda(B) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda U \\ \lambda V \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \lambda U \\ AU = \lambda V = \lambda^2 U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AU = \lambda^2 U \\ V = \lambda U \end{cases}$$

$\underline{E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} U \\ \lambda U \end{pmatrix}, U \in E_{\lambda^2}(A) \right\}}$ et il est clair que $U \mapsto \begin{pmatrix} U \\ \lambda U \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $E_\lambda(B)$ sur $E_{\lambda^2}(A)$. En particulier $\underline{\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)}$.

3) B est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim E_\lambda(B) = 2n$, c'est-à-dire

ssi $\sum_{\substack{\lambda^2 \in Sp(A) \\ \lambda \neq 0}} \dim E_\lambda(B) + \dim E_{-\lambda}(B) + \dim \underset{\underset{\dim E_0(A)}{\shortparallel}}{E_0(B)} = 2n$

(Avec la convention $E_0(A) = \{U \ AU = 0U\} = \ker A$ même si 0 n'est pas valeur propre.)

ssi $2 \sum_{\substack{\mu \in Sp(A) \\ \mu \neq 0}} \dim E_\mu(A) + \dim E_0(A) = 2n$. $\underline{= 2\left(\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A)\right) - \dim E_0(A)}$

Or $\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) \leq n$. Cette égalité n'est possible que si $\begin{cases} \dim E_0(A) = 0 \\ \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu(A) = n \end{cases}$, i.e. A est inversible et diagonalisable.

Exercice 12. $A^2 = I_n$.

1) A est annulée par le polynôme X^2-1 qui est scindé à racines simples elle est donc diagonalisable.

2) ~~$\forall A$ p~~

$\forall p \in \mathbb{N}$ $A^{2p} = I_n$ $A^{2p+1} = A$

Donc $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} I_n + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} A$.

$\exp(A) = \operatorname{ch} 1 \; I_n + \operatorname{sh} 1 \; A$

(Rq. On a pu couper la série en deux, sommation par paquets, car elle est absolument convergente)