Concours X-ENS 2012 **Filière MP**

Corrigé de l'épreuve : Ulm math D

Romain Krust et Michel Quercia

Thème : Théorème de Gordan (1868)

I

1. Soit $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_0$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda x) = f(x)$. En particulier, $f(x) = f(0)$: f est une fonction constante. Réciproquement, une fonction constante est bien une fonction polynomiale homogène d'ordre 0.
2. Il est clair que $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_k$ est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ une famille presque nulle (ie dont tous les termes sont nuls sauf un nombre au plus fini d'entre eux) de complexes et $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$. C'est un polynôme homogène d'ordre k si et seulement si , pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda X)^\alpha = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \lambda^k X^\alpha$, ou, en posant $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) X^\alpha = 0$. Puisque $(X^\alpha)_\alpha$ est une base, c'est équivalent à $a_\alpha(\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) = 0$ pour tout α (et tout λ). Finalement
$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_k = \mathrm{Vect}(\{X^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k\}),$$
et la dimension $d_{n,k}$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_k$ est égale au cardinal de $C = \{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| = k\}$. Donnons deux calculs de ce cardinal (bien évidemment, au concours, un seul suffit ; en fournir deux est une perte de de temps et risque même, dans certains cas, de donner au correcteur le sentiment que le propos n'est pas assuré) :
1. On a
$$d_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} d_{n-1,k-r} \quad \text{et} \quad d_{n,k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} d_{n-1,k-1-r}$$
d'où $d_{n,k} = d_{n,k-1} + d_{n-1,k}$. Par ailleurs,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_{n,0} = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ d_{1,k} = 1$$
Sur les premiers termes du tableau des $d_{n,k}$, on voit apparaître en diagonale les lignes successives du triangles de Pascal. Une récurrence sur $n + k$ permet de confirmer que
$$d_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$
2. On peut aussi constater que l'application
$$\alpha \mapsto (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} + (n-2))$$
de C dans l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur $n-1$ à valeurs dans $[\![0, k + n - 2]\!]$ est une bijection.

3. La base $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ peut être partitionnée en sous-familles $(X_\alpha)_{|\alpha|=k}$, $k\in\mathbb{N}$, et chacune est une base de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_k$. Donc

$$\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_k$$

Note : la notion de somme directe d'une famille quelconque de sous-espaces est hors programme.

4. (a) Soit $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}$ la matrice de u dans les bases canoniques. On a

$$f\circ u=f\left(\sum_{j=1}^m a_{1,j}X_j,\dots,\sum_{j=1}^m a_{n,j}X_j\right)\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m]$$

(b) La linéarité est immédiate. Il s'agit même d'un morphisme d'algèbre conservant le degré d'-homogénéité. S'il s'agit d'un isomorphisme, il induit un isomorphisme de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_1=\mathrm{Vect}(X_1,\dots,X_n)$ sur $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m]_1=\mathrm{Vect}(X_1,\dots,X_m)$. En identifiant $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_1$ et $\mathbb{C}^n$ d'une part, $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m]_1$ et $\mathbb{C}^m$ d'autre part, l'application induite n'est autre que u elle-même. Donc $n=m$ et u est un isomorphisme. Réciproquement, si u est un isomorphisme, l'application considérée admet pour réciproque $f\mapsto f\circ u^{-1}$.

II

1. (a) Notons tout d'abord que si cet ensemble est non vide, il est égal à l'ensemble des matrices diagonales inversibles. En effet, si ${}^tAMA=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ (où λ et μ sont non nuls), alors, en notant ζ et η des racines carrées de λ et μ et en posant $B=\begin{pmatrix}u/\zeta&0\\0&v/\eta\end{pmatrix}$, où $u,v\in\mathbb{C}^*$, on a

$${}^t(AB)M(AB)={}^tB({}^tAMA)B=\begin{pmatrix}u&0\\0&v\end{pmatrix}$$

Montrons maintenant qu'il est effectivement non vide. Posons $M=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$:

si $a\neq 0$, on a en posant $A=\begin{pmatrix}1&-b/a\\0&1\end{pmatrix}$, ${}^tAMA=\begin{pmatrix}a&0\\0&(ac-b^2)/a\end{pmatrix}$;

si $c\neq 0$, on a en posant $A=\begin{pmatrix}1&0\\-b/c&1\end{pmatrix}$, ${}^tAMA=\begin{pmatrix}(ac-b^2)/c&0\\0&c\end{pmatrix}$;

si $a=c=0$, on a en posant $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, ${}^tAMA=\begin{pmatrix}2b&0\\0&-2b\end{pmatrix}$.

(b) Si $A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, alors $\det({}^tAMA)=\det(M)$. L'ensemble cherché est donc contenu dans l'ensemble des matrices diagonales de même déterminant que M. Réciproquement, si N est diagonale et $\det(N)=\det(M)$, il existe, d'après la question précédente, $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $N={}^tAMA$ et l'on a $\det(N)=\det(A)^2\det(M)$ d'où $\det(A)^2=1$. Si $\det(A)=-1$, alors $A'=A\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ vérifie ${}^tA'MA'=N$ et $\det(A')=1$.

2. (a) Ceci résulte de **I.4.a.** et de la linéarité de l'application $M\mapsto{}^tAMA$.

(b) C'est immédiat.

3. L'application $A \mapsto \det(A)$ étant polynomiale, il est clair que $f \circ \det$ l'est aussi. En outre, pour toute $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\Phi^A(M) = f(\det({}^tAMA)) = f(\det(M)) = \Phi(M)$.
4. Les applications coordonnées sont continues et une somme de produits de fonctions continues est continue.
5. Posons $f(x) = \Phi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Soit $M \in \mathcal{V} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Il existe d'après **1.b.** une matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tAMA = \begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\Phi(M) = \Phi^A(M) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(\det(M)).$$

Ainsi, les applications continues Φ et $f \circ \det$ coïncident sur $\mathcal{V} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui est [1] une partie dense de $\mathcal{V}$. Elles sont donc égales. L'unicité résulte immédiatement de la surjectivité de $\det$.

1 III

1. $\diamond$ Réflexivité : évident.

   $\diamond$ Antisymétrie : Si $\alpha \neq \beta$, on a, en notant i le plus petit entier tel que $\beta_i - \alpha_i \neq 0$, $\beta_i - \alpha_i > 0$ ou $\beta_i - \alpha_i < 0$ donc $\alpha \prec \beta$ ou $\beta \prec \alpha$.

   $\diamond$ Transitivité : Si $\alpha \prec \beta \prec \gamma$ alors, en notant i et j les plus petits indices tels que $\beta_i - \alpha_i \neq 0$ et $\gamma_j - \beta_j \neq 0$, et en supposant par exemple $i \leqslant j$, i est le plus petit indice tel que $\gamma_i - \alpha_i \neq 0$, et l'on a $\gamma_i - \alpha_i = (\gamma_i - \beta_i) + (\beta_i - \alpha_i) > 0$ donc $\alpha < \gamma$.

   $\diamond$ Ordre total : immédiat.
2. Un ensemble fini non vide et totalement ordonné possède évidemment un plus grand élément. Donc toute partie finie non vide de $\mathbb{N}^n$ possède un plus grand élément.
3. Immédiat compte tenu de $(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$.
4. Soient $\alpha = \deg(f)$ et $\beta = \deg(g)$. L'inégalité $\deg(fg) \leqslant \deg(f) + \deg(g)$ est immédiate. Mais le produit fg ne comporte qu'un unique monôme de degré $\alpha + \beta$ car si $\alpha', \beta' \in \mathbb{N}^n$ sont tels que $\alpha' \preccurlyeq \alpha$ et $\beta' \preccurlyeq \beta$ et $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ alors $(\alpha - \alpha') = -(\beta - \beta')$ qui ne peut être non nul (le premier terme non nul serait strictement positif et strictement négatif), d'où $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$. On a donc $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
5. Montrons tout d'abord que toute partie non vide de $\mathbb{N}^n$ possède pour $\preccurlyeq$ un plus petit élément. Soit E une partie non vide de $\mathbb{N}^n$. Notons $p_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ l'application $x \mapsto x_i$. L'ensemble $p_1(E)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet un plus petit élément a_1. Posons $E_1 = \{x \in E;\ p_1(x) = a_1\}$, puis $a_2 = \min(p_2(E_1))$, $E_2 = \{x \in E_1;\ p_2(x) = a_2\}, \ldots, a_n = \min(p_n(E_{n-1}))$. L'élément $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est le plus petit élément de E.

   Prouvons maintenant l'énoncé demandé. Soient $k \geqslant 1$ et $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde l'existence de $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ mettant l'énoncé en défaut, et notons F l'ensemble de ces fonctions polynomiales. Alors $f \in F$ ne vérifie pas elle-même le point **2.** (sans quoi on peut choisir $q_1 = \ldots = q_k = 0$ et $r = f$) et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \alpha(f) \quad = \quad & \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n; f \text{ contient un monôme de degré } \alpha \\ & \qquad \text{vérifiant } \exists i \in \{1, \ldots, k\}, \alpha - \deg(b_i) \geqslant 0\} \end{aligned}$$

1. Pour toute $M \in \mathcal{V}$, $M + \varepsilon I_2 \in \mathcal{V}$ est inversible pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ suffisamment petit en module.

D'après le lemme, on peut choisir f tel que $\alpha(f)$ soit minimal. Soit i tel que $\alpha(f) - \deg(b_i) \geqslant 0$. Notons a le coefficient de $X^{\alpha(f)}$ dans f et b le coefficient de $X^{\deg(b_i)}$ dans b_i et posons

$$g = f - \frac{a}{b} X^{\alpha(f)-\deg(b_i)} b_i.$$

On a clairement $g \in F$. Comme $\deg(X^{\alpha(f)-\deg(b_i)} b_i) = \alpha(f)$, les monômes intervenants dans g sont de degré $\prec \alpha(f)$. Donc $\alpha(g) \prec \alpha(f)$, ce qui est absurde.

Remarque : Il sera utile de noter que l'on peut, sans modifier la preuve, adjoindre la condition $|\deg(q_i)| < |\deg(f)|$ lorsque $f \neq 0$.

6. (a) Si $X^\beta \in I(\Lambda)$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \Lambda$ et $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$X^\beta = X^{\alpha_1} q_1 + \ldots + X^{\alpha_s} q_s$$

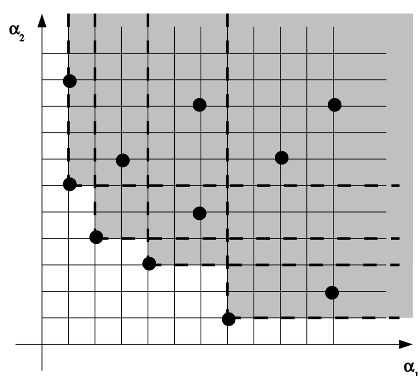
et l'un des q_i comporte un monôme de degré γ tel que $\beta = \alpha_i + \gamma$. Donc $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$.
Réciproquement, s'il existe $\alpha \in I(\Lambda)$ tel que $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $X^\beta = X^{\beta-\alpha} X^\alpha \in I(\Lambda)$.

(b) Si $f \in I(\Lambda)$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \Lambda$ et $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$f = X^{\alpha_1} q_1 + \ldots + X^{\alpha_s} q_s$$

et chaque monôme X^β de f est monôme de l'un des $X^{\alpha_i} q_i$. Comme ci-dessus, $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$.
La réciproque est évidente.

(c) Le diagramme suivant, pour $n = 2$, illustre l'existence d'une telle partie finie (les points noirs sont les éléments de Λ et les zones grisées correspondent aux β tels que $X^\beta \in I(\Lambda)$).



Raisonnons par récurrence sur n, en supposant $\Lambda \neq \emptyset$ (le cas contraire est trivial). L'hypothèse de récurrence sera :

$$H_n \ : \text{Pour toute } \Lambda \subset \mathbb{N}^n, \text{ il existe } \Lambda_0 \text{ finie telle que } \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$$

$\diamond H_1$ est vraie : Il suffit de prendre $\Lambda_0 = \{\min(\Lambda)\}$.
$\diamond$ Si $n \geqslant 2$ et H_{n-1} est vrai : On va montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \beta \in \Lambda,\ \exists \alpha \in \Lambda; \alpha_n \leqslant M \text{ et } \beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$$

La conclusion en découlera en raisonnant ainsi : on choisit un tel M et on pose $\Lambda_{n-1} = \{\alpha \in \Lambda;\ \alpha_n \leqslant M\}$. On a alors $\Lambda_{n-1} \subset \Lambda \subset \Lambda_{n-1} + \mathbb{N}^n$. On construit ensuite, de la même façon,

$M' \in \mathbb{N}$ tel que, en posant $\Lambda_{n-2} = \{\alpha \in \Lambda_1, \alpha_{n-1} \leqslant M'\}$, on ait $\Lambda_{n-2} \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_{n-2}+\mathbb{N}^n$, etc. Alors $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$ et $\Lambda_0 \subset [\![1, M^{(n-1)}]\!] \times \ldots \times [\![1, M']\!] \times [\![1, M]\!]$ est fini.

Prouvons maintenant l'existence de M. À chaque $\alpha \in \Lambda$, associons $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ et posons $\Lambda' = \{\alpha', \alpha \in \Lambda\}$. Il existe, d'après H_{n-1}, Λ'_0 fini tel que $\Lambda'_0 \subset \Lambda' \subset \Lambda'_0 + \mathbb{N}^{n-1}$. Il suffit alors de choisir M tel que, pour tout $\beta \in \Lambda'_0$, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $\alpha' = \beta$ et $\alpha_n \leqslant M$.

7. On peut supposer $I \neq \{0\}$. Soit $\Lambda = \{\deg(f), f \in I \setminus \{0\}\}$ et $\Lambda_0 \subset \Lambda$ une partie finie telle que $I(\Lambda_0) = I(\Lambda)$. Soient $b_1, \ldots, b_s \in I \setminus \{0\}$ tels que $\Lambda_0 = \{\deg(b_k), 1 \leqslant k \leqslant s\}$ et J l'idéal engendré par $b_1, \ldots, b_s$. Soit $f \in I \setminus \{0\}$: il existe $q_1, \ldots, q_s$ et r comme dans **5.**. Alors $r \in I$ d'après le premier point et, si $r \neq 0$, $\deg(r) \in \Lambda$. Par **6.a.**, $\deg(r) - \deg(b_i) \in \mathbb{N}^n$ pour un certain $i \in [\![1, s]\!]$, ce qui contredit le second point de **5.**. Donc $r = 0$, $f \in J$ et $I = J$.
8. Soit F une partie finie de I qui engendre I. Il existe $r \geqslant 0$ tel que tous les éléments de F appartiennent à l'idéal engendré par $f_0, \ldots, f_r$. L'idéal engendré par $f_0, \ldots, f_r$ est I.

IV

1. (a) Provient immédiatement de la linéarité de l'application $(u, v) \mapsto A(u, v)$ et de **I.4.b.**.
   (b) L'application Φ^A est polynomiale car composée de $f \mapsto f^A$ qui est linéaire et de Φ qui est polynomiale (**I.4.b**). La linéarité de $\Phi \mapsto \Phi^A$ est évidente.
2. La remarque faite en **I.4.b.** montre que si Φ est homogène de d'ordre k, Φ^A aussi.
3. Il s'agit d'une partition de la base canonique $(X^\nu)_{|\nu|=k}$ de $\mathcal{E}_{m,k}$. Noter que le nombre de valeurs de p pour lesquels $\mathcal{E}_{m,k,p} \neq \{0\}$ est fini car un tel p vérifie $p \leqslant km$.
4. On posera pour $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$, $\|\nu\| = \nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + m\nu_m$.
   (a) On a clairement, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^{m+1}$, $|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))| = k$ et $\|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\|+1$ (lorsque $i \in [\![1, m]\!]$), ainsi que $|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))| = k$ et $\|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\| + 1$ (lorsque $i \in [\![0, m-1]\!]$). Les inclusions demandées en résultent.
   (b) Notons $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^{[\![0,m]\!]}$ (le terme 1 correspondant à l'indice i). Soit $\nu \in \mathbb{N}^{[\![0,m]\!]}$ tel que $|\nu| = k$ et $\|\nu\| = p$. On a (on note $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon) :

$$\begin{aligned} DD'(X^\nu) &= D\left(\sum_{j=0}^{m-1}(m-j)\nu_j X^{\nu+e_{j+1}-e_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\nu_j(\nu_i + \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j})X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(DD'-D'D)(X^\nu) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\left[\nu_j(\nu_i+\delta_{i,j+1}-\delta_{i,j})\right.\\
&\qquad\left.-\nu_i(\nu_j+\delta_{j,i-1}-\delta_{i,j})\right] X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)(\delta_{i,j+1}-\delta_{i,j})(\nu_j-\nu_i)X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\delta_{i,j+1}(\nu_j-\nu_i)X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i}\\
&= \sum_{i=1}^{m} i(m-i+1)(\nu_{i-1}-\nu_i)X^\nu\\
&= \sum_{i=0}^{m}(m-2i)\nu_i X^\nu\\
&= (mk-2p)X^\nu
\end{aligned}$$

On conclut par linéarité.

(c) On procède par récurrence sur r. Le cas $r=1$ vient d'être établi. Supposons (1) vraie pour un certain $r \geqslant 1$. Alors, pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$, $D^r(\Phi) \in \mathcal{E}_{m,k,p-r}$ si $r \leqslant p$ et $D^r(\Phi)=0$ si $r>p$. Donc

$$\begin{aligned}
(D^{r+1}D'-D'D^{r+1})(\Phi) &= D(D^rD'-D'D^r)(\Phi)+(DD'-D'D)D^r(\Phi)\\
&= r(mk-2p+r-1)D^r(\Phi)+(mk-2(p-r))D^r(\Phi)\\
&= (r+1)(mk-2p+r)D^r(\Phi)
\end{aligned}$$

La relation (2) se prouve de façon similaire.

(d) Soit $\Phi \in E_{mkp}\setminus\{0\}$. Alors, d'après la remarque faite en **3.**, on a $p \leqslant km$ et, par **4a.**, $D^{km+1}(\Phi)=D'^{km+1}(\Phi)=0$. Les endomorphismes induits par D et D' sur $\mathcal{E}_{m,k}$ sont donc nilpotents. Soient maintenant $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ tel que $D(\Phi)=0$ et r minimal tel que $D'^r(\Phi)=0$. Alors, d'après (2), $r(r-1)D'^{r-1}(\Phi)=0$, d'où $r\leqslant 1$ et $D'(\Phi)=0$. La réciproque est similaire.

5. (a) Pour $i \in [\![0,m]\!]$, on a $e_i(A(u,v))=e_i(\lambda u,\lambda^{-1}v)=\lambda^{m-2i}e_i(u,v)$, c'est-à-dire

$$e_i^A=\lambda^{m-2i}e_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\Phi^A(x_0,\dots,x_m) &= \Phi\left(\left(\sum_{i=0}^{m}x_ie_i\right)^A\right)=\Phi\left(\sum_{i=0}^{m}x_ie_i^A\right)\\
&= \Phi\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda^{m-2i}x_ie_i\right)=\Phi(\lambda^m x_0,\lambda^{m-2}x_1,\dots,\lambda^{-m}x_m)
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\Phi=X^\alpha$ (où $|\alpha|=k$; rappelons aussi que l'on a posé $\|\alpha\|=\sum_{i=0}^{m} i\alpha_i$) :

$$\Phi^A=\lambda^{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(m-2i)}\Phi=\lambda^{mk-2\|\alpha\|}\Phi$$

Puisque les $(X^\alpha)_{|\alpha|=k}$ forment une base de $\mathcal{E}_{m,k}$, on a $\Phi^A=\Phi$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $\Phi \in \mathrm{Vect}\{X^\alpha, |\alpha|=k, 2\|\alpha\|=mk\}$, c'est-à-dire si mk est pair (faute de quoi cet espace serait réduit à $\{0\}$) et $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,mk/2}$.

(b) Posons plutôt $A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a ici :

$$e_i(A_\mu(u,v)) = e_i(u+\mu v, v) = \binom{m}{i}(u+\mu v)^{m-i}v^i = \binom{m}{i}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j}u^{m-i-j}(\mu v)^j v^i,$$

c'est-à-dire :

$$e_i^{A_\mu} = \sum_{j=0}^{m-i}\binom{i+j}{i}\mu^j e_{i+j}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\Phi^{A_\mu}(x_0,\ldots,x_m) &= \Phi\left(\sum_{i=0}^{m} x_i e_i^{A_\mu}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\binom{i+j}{j}\mu^j x_i e_{i+j}\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^j x_{k-j}\right) e_k\right) \\
&= \Phi(x_0, \mu x_0 + x_1, \mu^2 x_0 + 2\mu x_1 + x_2, \ldots, \\
&\qquad \mu^m x_0 + m\mu^{m-1}x_1 + \frac{m(m-1)}{2}\mu^{m-2}x_2 + \ldots + x_m)
\end{aligned}$$

Pour $\Phi = X^\alpha$, il vient :

$$\Phi^{A_\mu}(x_0,\ldots,x_m) = \prod_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^j x_{k-j}\right)^{\alpha_k}$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^j x_{k-j}\right) = k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\mu^j x_{(k-1)-j}.$$

On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\Phi^{A_\mu}(x_0,\ldots,x_m)\right) = D(\Phi)^{A_\mu}$$

Cette relation est, par linéarité, valable pour toute $\Phi \in \mathcal{E}_m$. On a donc $\Phi^{A_\mu} = \Phi$ quel que soit μ si et seulement si $D(\Phi)^{A_\mu} = 0$ quel que soit μ, c'est-à-dire si et seulement si $D(\Phi) = 0$.

(c) C'est un calcul similaire.

6. (a) C'est un sous-espace vectoriel parce que $\Phi \mapsto \Phi^A$ est linéaire. C'est aussi un sous-anneau parce que cette application est un morphisme d'anneau ($(\Phi\Psi)^A = \Phi^A\Psi^A$ et $1^A = 1$). De manière plus synthétique, $\mathcal{J}_m$ est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathcal{E}_m$ car $\Phi \mapsto \Phi^A$ est un morphisme d'algèbres (unitaires).

(b) Soit $\Phi \in \mathcal{J}_m$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\Phi_k)_k \in \prod_{k=0}^{N}\mathcal{E}_{m,k}$ tels que $\Phi = \sum_{k=0}^{N}\Phi_k$ et l'on a :

$$\Phi = \Phi^A = \sum_{k=0}^{N}\Phi_k^A$$

Or $\mathcal{E}_{m,k}$ étant stable par $\Phi \mapsto \Phi^A$, on a $\Phi_k^A \in \mathcal{E}_{m,k}$ d'où $\Phi_k = \Phi_k^A$ et $\Phi_k \in \mathcal{J}_{m,k}$. Ainsi l'on a bien

$$\mathcal{J}_m = \bigoplus_k \mathcal{J}_{m,k}$$

7. (a) C'est immédiat par **5.a.**

   (b) Notons que, pour toutes $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\Phi^{AB} = \left(\Phi^B\right)^A$. Soit alors $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{C}^*$ une racine carrée de $\det(A)$ et $B = \dfrac{1}{d}A$ (donc $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). On a, pour toute $\Phi \in \mathcal{J}_{m,k}$:

$$\Phi^A = \Phi^{(dI_2)B} = \left(\Phi^B\right)^{dI_2} = \Phi^{dI_2}.$$

Or, pour toute $f \in \mathcal{B}_m$,

$$\Phi^{dI_2}(f) = \Phi(f \circ (dI_2)) = \Phi(d^m f) = d^{mk}\Phi(f).$$

On a bien

$$\Phi^A = \det(A)^{mk/2}\Phi.$$

V

1. L'application F est polynomiale d'après **I.4.a.** Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a

$$F(A) = G(AB) = G(ax + bz, ay + bt, cx + dz, cy + dt)$$

donc $D_d F(A) = (zD_c G + tD_d G)(AB)$ et

$$D_a D_d F(A) = (xzD_a D_c G + yzD_b D_c G + xtD_a D_d G + ytD_b D_d G)(AB).$$

De même

$$D_b D_c F(A) = (xzD_a D_c G + xtD_b D_c G + yzD_a D_d G + ytD_a D_d G)(AB)$$

d'où

$$\Omega(F)(A) = (xt - yz)(D_a D_d G - D_b D_c G)(AB) = \det(B)\Omega(G)(AB)$$

2. (a) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour $i \in [\![0, m]\!]$, on a

$$e_i^A(u, v) = e_i(A(u, v)) = \binom{m}{i}(au + bv)^{m-i}(cu + dv)^i.$$

En développant cette expression, on voit qu'il existe des applications $p_{j,i} \in \mathcal{P}$ telles que

$$e_i^A = \sum_{j=0}^{m} p_{j,i}(a, b, c, d)e_j.$$

Pour $f = \sum_{i=0}^{m} x_i e_i$, il vient

$$f^A = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{m} p_{j,i}(a, b, c, d)x_i\right)e_j$$

et

$$\Phi(f^A) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{m} p_{0,i}(a, b, c, d)x_i, \sum_{i=0}^{m} p_{1,i}(a, b, c, d)x_i, \ldots, \sum_{i=0}^{m} p_{m,i}(a, b, c, d)x_i\right)$$

Il est maintenant clair que $A \mapsto \Phi(f^A) \in \mathcal{P}$ et $G_f \in \mathcal{P}$.

(b) Notons $\mathrm{Deg}(P) = |\deg(P)|$ le degré total d'un polynôme P. On a clairement $\mathrm{Deg}(\Omega^q(G_f)) \leqslant 0$ dès que $2q \geqslant \mathrm{Deg}(G_f)$. Or les applications $p_{j,i}$ ci-dessus étant de degré total m, on a $\mathrm{Deg}(G_f) \leqslant m\mathrm{Deg}(\Phi) + 2r$. Aussi $\Omega^q(G_f)$ est-il indépendant de A dès que $2q \geqslant m\mathrm{Deg}(\Phi) + 2r$.

(c) Soient $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{B}_m$. On a, pour tout $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$,

$$G_{f^A}(M) = \Phi((f^A)^M)\det(M)^r = \Phi(f^{AM})\det(AM)^r\det(A)^{-r} = G_f(AM)\det(A)^{-r}$$

et, par **1.**,

$$\Omega^q(G_{f^A})(M) = \Omega^q(G_f)(AM)\det(A)^q\det(A)^{-r} = \Omega^q(G_f)(M)\det(A)^{q-r}$$

On a bien

$$\Theta(f^A) = \Theta(f)\det(A)^{q-r}$$

L'appartenance de Θ à $\mathcal{J}_m$ en découle immédiatement.

3. De $G(A) = (ad - bc)^q$, on déduit aisément $\Omega(G)(A) = q(q+1)\det(A)^{q-1}$ puis

$$\Omega^q(G)(A) = (q+1) \times q!^2$$

4. Si mk est impair, alors $\Psi = 0$ d'après **IV.7.a.**. On peut dans ce cas prendre $\Phi = 0$, $q = r = 0$.
Si mk est pair, posons $q = mk/2$, $r = 0$ et $\Phi = \dfrac{1}{(q+1)q!^2}\Psi$. Alors, d'après **IV.7.b.**,

$$\Phi^A = \frac{1}{(q+1)q!^2}\det(A)^q\Psi$$

et, pour toute $f \in \mathcal{B}_m$,

$$G_f(A) = \Phi^A(f) = \frac{1}{(q+1)q!^2}\det(A)^q\Psi(f)$$

Par **3.**, il vient

$$\Omega^q(G_f) = \Psi(f)$$

5. **Étape 1.** Montrons qu'il suffit d'établir l'énoncé sous l'hypothèse additionnelle qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ et $(\ell_i)_{1\leqslant i\leqslant r} \in [\![0, s]\!]^r$ tels que $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m,\ell_i}$, $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m,s-\ell_i}$ (et par conséquent $\Psi \in \mathcal{E}_{m,s}$).
Posons en effet, dans le cas général :

$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{i,k}, \quad \Phi_{i,k} \in \mathcal{E}_{m,k} \qquad \text{et} \qquad \Psi_i = \sum_\ell \Psi_{i,\ell}, \quad \Psi_{i,\ell} \in \mathcal{J}_{m,k}.$$

On a

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left(\sum_k \Phi_{i,k}\right)\left(\sum_\ell \Psi_{i,\ell}\right) = \sum_s \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k}\Psi_{i,\ell}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k}\Psi_{i,\ell}$ est la partie homogène d'ordre s de Ψ. Celle-ci appartient $\mathcal{J}_{m,s}$. D'après l'hypothèse, il existe $\Pi_{i,k} \in \mathcal{J}_m$ tel que

$$\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k}\Psi_{i,\ell} = \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Pi_{i,k}\Psi_{i,\ell}$$

et on en déduit

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left(\sum_k \Pi_{i,k}\right)\Psi_i$$

qui montre que $\Pi_i = \sum_k \Pi_{i,k}$ convient.

Étape 2. Supposons maintenant l'existence de $s \in \mathbb{N}$ et $(\ell_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in [\![0, s]\!]^r$ tels que $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m,\ell_i}$ et $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m,s-\ell_i}$. On a $\Psi \in \mathcal{J}_{m,s}$. Si ms est impair, alors $\Psi = 0$ et $\Pi_i = 0$ conviennent. Supposons ms pair et posons $q = \dfrac{ms}{2}$. On a :

$$\Psi(f^A) = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A)\Psi_i(f^A)$$

donc, par **IV.7.b.**,

$$\Psi(f)\det(A)^q = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A)\det(A)^{m\ell_i/2}\Psi_i(f)$$

En appliquant Ω^q, il vient :

$$(q+1)q!^2\Psi(f) = \sum_{i=1}^r \Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M)\det(M)^{m\ell_i/2})(A)\Psi_i(f)$$

Or, $M \mapsto \Phi_i(f^M)\det(M)^{m\ell_i/2}$ est homogène de degré $m(s-\ell_i) + 2m\ell_i/2 = 2q$. Donc $\Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M)\det(M)^{m\ell_i/2})$ est indépendante de M et, d'après **V.2.c.**,

$$\Pi_i : f \mapsto \frac{1}{(q+1)q!^2}\Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M)\det(M)^{m\ell_i/2})$$

appartient à $\mathcal{J}_m$. On a en outre :

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \Pi_i\Psi_i$$

6. Soit I l'ideal de $\mathcal{E}_m$ engendré par $\bigoplus_{k \geqslant 1} \mathcal{J}_{m,k}$. Par **III.7.**, I admet une famille génératrice finie $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$. Soit $\Psi \in \mathcal{J}_m$. Il existe $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \in \mathcal{E}_m$ tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Phi_i\Psi_i$$

La remarque faite en **III.5.** montre que l'on peut choisir Φ_i vérifiant $\mathrm{Deg}(\Phi_i) < \mathrm{Deg}(\Psi)$ (si $\Psi \neq 0$). Il existe, d'après **5.**, $\Pi_1, \ldots, \Pi_r \in \mathcal{J}_m$ tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Pi_i\Psi_i$$

L'examen de la preuve de **5.** montre que $\mathrm{Deg}(\Pi_i) \leqslant \mathrm{Deg}(\Phi_i)$ donc $\mathrm{Deg}(\Pi_i) < \mathrm{Deg}(\Psi)$ (si $\Psi \neq 0$). En appliquant ce même procédé aux polynômes Π_i on obtient, en un nombre fini d'étapes, une expression de Ψ de la forme $f(\Psi_1, \ldots, \Psi_r)$.