Concours commun Mines - Ponts PSI (Maths II) 2015

I) Le groupe — Matrices symplectiques

1) $J^2 = -I_{2n}$ $\quad {}^tJ = -J \quad J^{-1} = -J = {}^tJ$

2) ${}^tK(\alpha) = \begin{bmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ $\quad {}^tK(\alpha)\, J = \begin{bmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$

$${}^tK(\alpha)\, J\, K(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = J$$

$K(\alpha) \in Sp_{2n}$

3) ${}^tL_U = \begin{bmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{bmatrix}$ $\quad {}^tL_U\, J = \begin{bmatrix} 0_n & -{}^tU \\ U^{-1} & 0_n \end{bmatrix}$

$${}^tL_U\, J\, L_U = \begin{bmatrix} 0_n & -{}^tU \\ U^{-1} & 0_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} = J$$

$L_U \in Sp_{2n}$

4) Si $M \in Sp_{2n}$ $\quad \det({}^tM\, J\, M) = \det J$

$\det(M)^2 \det J = \det J$ ← car $\det({}^tM) = \det(M)$ et $\det(AB) = \det A \det B$.

$\det(M)^2 = 1$ ← car $\det(J) \neq 0$ puisque J est inversible.

$\det(M) \in \{-1, 1\}$.

(La question est ambigüe, on pourrait se demander si il ne faut pas prouver qu'il existe effectivement des matrices M de Sp_{2n} telles que $\det(M) = 1$ et $\det(M) = -1$. La suite du problème montrera que -1 est une valeur impossible. $I_{2n} \in Sp_{2n}$ et $\det(I_{2n}) = 1$ donc 1 est une valeur réellement possible)

5) Si $(M_1, M_2) \in (Sp_{2n})^2$ $\quad {}^t(M_1M_2)\, J\, M_1M_2 = {}^tM_2\, {}^tM_1\, J M_1 M_2 = {}^tM_2\, J M_2 = J$

donc $M_1 M_2 \in Sp_{2n}$.

6) On a vu que si M est dans Sp_{2n} alors M est inversible (2)

car $\det(M) = \pm 1 \neq 0$.

Donc M appartient à Sp_{2n} ssi :

- M est inversible.
- ${}^tM = -JM^{-1}J$ (multiplier à gauche ${}^tMJM = J$ par $M^{-1}J$.

On a alors par passage à l'inverse

$$\cdot\ {}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1} = -J^{-1}(M^{-1})^{-1}J^{-1} = (-1)^3 J(M^{-1})^{-1}J = -J(M^{-1})^{-1}J$$

donc $M^{-1} \in Sp_{2n}$.

7) En reprenant la relation ${}^tM = -JM^{-1}J$ on obtient de même en passant à la transposée

$$ {}^t({}^tM) = -{}^tJ\ {}^t(M^{-1})\ {}^tJ = -(-J)({}^tM)^{-1}(-J) = -J({}^tM)^{-1}J$$

(et ${}^tM$ est inversible).

Donc $M \in Sp_{2n} \Rightarrow {}^tM \in Sp_{2n}$

8) On effectue le produit par blocs

$${}^tMJM = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C & -D \\ A & B \end{bmatrix}$$

$${}^tMJM = \begin{bmatrix} -{}^tAC + {}^tCA & -{}^tAD + {}^tCB \\ -{}^tBC + {}^tDA & -{}^tBD + {}^tDB \end{bmatrix}$$

les conditions à vérifier pour que M soit dans Sp_{2n} sont donc.

$$\left\{\begin{array}{l} -{}^tAC + {}^tCA = 0 \\ -{}^tBD + {}^tDB = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} {}^tDA - {}^tBC = I_n \\ -{}^tAD + {}^tCB = -I_n \end{array}\right.$$

Les deux dernières sont équivalentes par passage à la transposée.

II Le centre de Sp_{2n}

9) Vérification immédiate.

10) $L = {}^tK(-1)$ $\in Sp_{2n}$ d'après 2) et 7) et sa transposée ${}^tL = K(-1) \in Sp_{2n}$.

On a donc $ML = LM$ et ${}^tLM = M{}^tL$.

$$ML = LM \iff \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{bmatrix}$$

$\underline{ML = LM \iff C = 0 \quad A = D}$

De même $\underline{M{}^tL = {}^tLM \iff B = 0 \quad A = D}$ (on peut aussi remarquer $M{}^tL = {}^tLM \iff L{}^tM = {}^tML$)

Donc $\underline{M \in Z \Rightarrow B = C = 0 \text{ et } A = D}$

11) $L_U \in Sp_{2n}$ (pour tout U de GL_n) et si $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ alors $ML_U = L_UM \iff \begin{cases} AU = UA \\ A{}^tU^{-1} = {}^tU^{-1}A \end{cases} \Rightarrow AU = UA$.

12) Or $\forall i,j$ $I_n + E_{i,j} \in GL_n$ ($\det(I_n + E_{i,j}) = 1$ si $i \neq j$, 2 si $i = j$.)

Donc $\forall i,j$ $A(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})A$ soit $\underline{AE_{i,j} = E_{i,j}A}$.

Ecrivons $\underline{A = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}}$ alors puisque $\underline{E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{l,i} E_{k,j}}$ on a.

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A \iff \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l} E_{i,l}.$$

Par unicité de la décomposition sur la base $E_{k,l}$ et en particulier $a_{j,i} = 0$

$\begin{cases} \text{Si } i \neq j \text{ en prenant } k = j \ \forall l \quad a_{j,l} = 0 \\ \text{Si } i \neq j \text{ en prenant } k = i \quad l = j \quad a_{i,i} = a_{j,j}. \end{cases}$

Donc $\underline{A = a_{1,1} I_n}$ or $\underline{\det A = \pm 1}$ donc $\underline{A = \pm I_{2n}}$ et $\underline{Z = \{-I_{2n}, I_{2n}\}}$

III Déterminant d'une matrice symplectique

13) $\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U+QV & QW \\ V & W \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = M$

On sait que D est inversible. Cette égalité est vérifiée

soi $\underline{W = D}$ $\underline{Q = BD^{-1}}$ $\underline{V = C}$. $\underline{U = A - BD^{-1}C}$.

14) $\det(M) = \det \begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = 1 \times \det U \times \det W$.

$\underline{\det M = \det W \det A = \det D \det (A - BD^{-1}C)}$

$\underline{= \det ({}^tD) \det(A - BD^{-1}C)}$

$= \det({}^tD A - {}^tB B D^{-1} C)$

$= \det({}^tD A - {}^tB D D^{-1} C)$) question 8

$= \det({}^tD A - {}^tB C)$

$= \det(I_n)$) question 8

$\underline{\det M = 1}$.

15) On a $\underline{QV_1 = s_1 PV_1}$ $\underline{QV_2 = s_2 PV_2}$

Remarquons que $\forall (U,V) \in \mathcal{E}_n$ $\forall M \in \mathcal{M}_n$ $\underline{(MU|V) = {}^tU {}^tM V = (U|{}^tMV)}$

On a donc $(QV_1 | QV_2) = (s_1 PV_1 | QV_2) = s_1 (V_1 | {}^tPQV_2)$

$(QV_1 | QV_2) = (QV_1 | s_2 PV_2) = s_2 (V_1 | {}^tQPV_2)$

Or ${}^tPQ = {}^tQP$ et $s_1 \neq s_2$, de $\underline{s_1 (V_1 | {}^tPQV_2) = s_2 (V_1 | {}^tQPV_2)}$

il vient donc $\underline{(s_1 - s_2)(V_1 | {}^tPQV_2) = 0}$

puis $(V_1 | {}^tPQV_2) = 0$

et finalement $\underline{(QV_1 | QV_2) = 0}$

On suppose maintenant D non inversible.

16) D'après 8 on a. $-{}^tAD + {}^tCB = -I_n$.

Soit X dans $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D$ alors $0 = -{}^tADX + {}^tCBX = -X$

donc $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$.

17) Si $DV_i = 0$ alors puisque $(D - s_i B)V_i = 0$ et $s_i \neq 0$ on aura $BV_i = 0$, soit $V_i \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$, ce qui est impossible car $V_i \neq 0$.

Puisque ${}^tBD = {}^tDB$ d'après la question 8) nous sommes dans les hypothèses de la question 15) avec $P = B$ $Q = D$.

On en déduit que les DV_i sont non nuls et deux à deux orthogonaux. Il forment donc une famille libre.

En particulier $m \leq n$. (L'hypothèse $m \leq n$ est inutile et même contreproductive, puisque c'est la conclusion à laquelle on veut arriver).

18) D'après la question précédente il existe au plus n réels distincts et non nuls s tel que pour un tel s il existe un V non nul avec $(D - sB)V = 0$. Soit S l'ensemble de ces s.

Puisque $\mathbb{R} - (S \cup \{0\})$ est non vide il contient un élément α.

On a alors $\forall V \neq 0$ $(D - \alpha B)V \neq 0$ Donc $D - \alpha B$ est inversible.

19) Soit α déterminé pour que $D - \alpha B$ soit inversible.

$$K(-\alpha)M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{bmatrix} \in Sp_{2n}$$

et $D - \alpha B$ est inversible.

Donc d'après la question 14) $\det(K(\alpha)M) = 1$

or $\det(K(-\alpha)) = 1$ donc $\det M = 1$

En conclusion $\forall M \in Sp_{2n}$ $\det(M) = 1$.