Le but de ce problème est de caractériser les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que l'identité.

Notations et conventions

Soit G un groupe fini (noté multiplicativement) de cardinal $|G|$. On note $\mathbf{1}_G$ l'unité de G. On rappelle que tout élément g de G vérifie $g^{|G|} = \mathbf{1}_G$ et on admet que si p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe $g \in G \setminus \{\mathbf{1}_G\}$ tel que $g^p = \mathbf{1}_G$.

Si E est un C-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E et Id_E l'identité de E. Si ϕ est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(\phi)$ la trace de ϕ et $\det(\phi)$ son déterminant.

Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on note V^G l'ensemble des vecteurs fixés par G : $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, g(v) = v\}$. On dit que V est **stable** par G si quels que soient $g \in G$, $v \in V$, on a $g(v) \in V$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0\}$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients complexes et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On note D_n le sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbf{C})$ à $2n$ éléments formé des matrices $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -c^k \\ -c^{-k} & 0 \end{pmatrix}$, où k est un entier compris entre 0 et $n-1$ et $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ (on ne demande pas de vérifier que D_n est un groupe).

I — Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(E)$

1. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Démontrer que, pour tout $g \in G$, g est diagonalisable et que, si G est commutatif, tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base.

Remarque : *Ne pas oublier de justifier tout résultat, qui bien que connu, n'est pas un théorème du cours. En clair, la réponse à cette question nécessite quelques développements.*

II — Isométries du triangle

Remarque : *Cette partie est indépendante du reste du problème.*

2. On se place dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé centré en O. On s'intéresse au sous-groupe $\widetilde{D_3}$ des isométries du plan qui préservent un triangle équilatéral ABC de centre O.

2a. Faire l'inventaire des éléments de $\widetilde{D_3}$ et démontrer que $\widetilde{D_3}$ est de cardinal 6.

2b. En se plaçant dans la base (non orthonormée) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, démontrer que le groupe $\widetilde{D_3}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ formé de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont dans $\{-1, 0, 1\}$.

2c. Diagonaliser dans $\mathbf{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire que le groupe $\widetilde{D_3}$ est isomorphe au groupe D_3.

III — Lemme de Schur

Notons $A = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E = \mathbf{C}^n$. Notons I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On appelle homothétie une matrice de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbf{C}$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application :

$$i(B) : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ M \longmapsto BMB^{-1} \end{cases}$$

3. Montrer que $i : B \longmapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(A)$, et que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G et $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans $\widetilde{G}$.

4. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ sont des sous-espaces stables par G.

5. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$; démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est de dimension 1.

6. Soient $M, N \in \mathcal{A}$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{A}$ suivant, $\Phi : X \longmapsto MXN$.
Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(N)$.

7. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.

7a. Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.

7b. Démontrer que $\mathrm{Im}(P) = E^G$ et en déduire que $\dim\left(E^G\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\, B$.

8. Démontrer que $\dim\left(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\left(B^{-1}\right) \mathrm{Tr}(B)$. On pourra considérer d'abord le cas où i est injectif.

On suppose, jusqu'à la fin de cette partie, que E est irréductible pour G.

9a. Soit X dans $\mathcal{A}$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de G. Démontrer que $X = \dfrac{1}{n} \mathrm{Tr}(X) I_n$.

9b. Soit $Y = \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\left(B^{-1}\right) B$. Démontrer que $Y = \dfrac{|G|}{n} I_n$.

10. On garde la notation Y jusqu'à la fin de cette partie. Soit $\zeta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/|G|}$. On note

$$\mathbf{Z}_G = \left\{ a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + \ldots + a_{|G|-1}\zeta^{|G|-1}, a_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

et $\mathbf{Z}_G[G]$ les combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbf{Z}_G$, de matrices de G.

10a. Démontrer que pour tout $B \in G$, $\mathrm{Tr}(B)$ est dans $\mathbf{Z}_G$, puis que Y est dans $\mathbf{Z}_G[G]$.

10b. On note $(C_k)_{1 \le k \le |G|^2}$ les $|G|^2$ matrices $\zeta^i B$ (où $1 \le i \le |G|$ et $B \in G$) de $\mathbf{Z}_G[G]$. Démontrer que pour tous $1 \le k \le |G|^2$, on peut trouver des coefficients $(a_{ij})_{1 \le i,j \le |G|^2}$ dans $\mathbf{Z}$ tels que $YC_k = \displaystyle\sum_{1 \le \ell \le |G|^2} a_{\ell k} C_\ell$.

10c. On pose $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le |G|^2}$ et $R = \dfrac{|G|}{n} I_{|G|^2} - A$. Démontrer que $\det(R) = 0$.

10d. Démontrer que $\dfrac{|G|}{n}$ est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de degré $|G|^2$ et de terme dominant égal à 1. En déduire que n divise $|G|$.

IV — Une caractérisation de D_n, n impair

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

11a. Soit D une droite vectorielle stable par tout élément de G. Soit p un projecteur sur D parallèlement à une droite D'. Soit

$$q = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}.$$

Montrer que q est un projecteur. Quelle est son image ? Que peut on dire de son noyau ?

11b. Démontrer que si $\mathbf{C}^2$ n'est pas irréductible pour G, il existe une base de $\mathbf{C}^2$ qui diagonalise les matrices de G. En déduire que G est commutatif.

Remarque : *Dans le sujet original la question précédente était résolue en moyennisant un produit scalaire hermitien, notion qui n'est plus au programme. Je l'ai reformulée en utilisant la moyennisation d'un projecteur.*

12a. On note $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ des matrices de déterminant 1. Quelles sont les matrices $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ telles que $B^2 = I_2$?

12b. Démontrer que si $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est non commutatif, alors $|G|$ est pair. En déduire que $-I_2 \in G$ (utiliser les rappels du préambule).

On suppose par la suite que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ ne contenant aucune homothétie autre que l'identité. On note $G_0 = G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

13a. Démontrer que G_0 est commutatif. En déduire qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ et un sous-groupe Γ_0 de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ formé de matrices diagonales de la forme $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ tels que $B \longmapsto PBP^{-1}$ soit un isomorphisme de G_0 sur Γ_0.

13b. Démontrer qu'il existe un entier m tel que Γ_0 soit le groupe $\mathcal{Z}_m$ des matrices $\begin{pmatrix}c^k & 0\\ 0 & c^{-k}\end{pmatrix}$ où $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/m}$ et k prend les valeurs de 0 à $m-1$.

13c. Si $G_0 = \{I_2\}$, démontrer qu'alors G est sommutatif (considérer le morphisme de groupes $\det : G \longrightarrow \mathbf{C}^*$).

On suppose dans les questions 14 et 15 que G n'est pas commutatif et que G_0 est exactement le groupe $\mathcal{Z}_m$.

14. Soit B_0 une matrice dans G qui n'est pas diagonale.

14a. Démontrer que pour tout $C \in \mathcal{Z}_m$ on a $B_0CB_0^{-1} \in \mathcal{Z}_m$. En déduire que B_0 est de la forme $B_0 = \begin{pmatrix}0 & b\\ b' & 0\end{pmatrix}$ avec $b, b' \in \mathbf{C}$.

14b. Calculer B_0^2 et en déduire que $b' = b^{-1}$.

14c. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ diagonale telle que $QB_0Q^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

15a. Soit B une matrice diagonale dans G. Montrer que $B \in \mathcal{Z}_m$.

15b. Montrer que $B \longmapsto QBQ^{-1}$ est un isomorphisme de G sur le groupe D_m.

16. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ qui ne contient pas d'homothétie autre que l'identité.

16a. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ et deux morphismes de groupes $\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ tels que toute matrice de G s'écrive $B = P\begin{pmatrix}\chi_1(B) & 0\\ 0 & \chi_2(B)\end{pmatrix}P^{-1}$.

16b. Montrer que $B \longmapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}$ est un isomorphisme de G dans le groupe des racines $|G|$-ièmes de l'unité.

16c. Montrer que G est le groupe des matrices de la forme $P\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}P^{-1}$, k variant de 0 à $|G|-1$, où l'on a posé $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi p/|G|}$ et $d = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi q/|G|}$, p et q étant deux entiers tels que $p-q$ est premier avec $|G|$.

17. Décrire à partir des questions précédentes tous les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que l'identité.

18. Montrer que le groupe fini commutatif $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ne peut pas être isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.