$MP2^*$–932 7/01/2017

Devoir en temps limité n° 5

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.
Dans tous le problème, on fixe un entier d non nul et on note $M_d(\mathbb{R})$ (respectivement $M_d(\mathbb{C})$) l'espace des matrices à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d, on note $A_{i,j}$ le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A. On rappelle que $A^0 = I_d$. On note $\mathrm{tr}\,(A)$ la trace de la matrice A.

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

Partie I : une norme utile sur $M_d(\mathbb{R})$

1) Montrer que, pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f_P : A \mapsto P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ est une fonction continue de $M_d(\mathbb{R})$ dans $M_d(\mathbb{C})$.

2) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,({}^tA \times B)$ est un produit scalaire sur l'espace $M_d(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, on note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

3) Pour tous entiers i, j entre 1 et d et toute matrice A de $M_d(\mathbb{R})$, comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.

4) Montrer que : $\forall (A, B) \in M_d(\mathbb{R})^2$, $\|A \times B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Partie II : séries entières de matrices

Dans cette partie on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

6) Soit $\mathcal{B} = \{A \in M_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\phi : A \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

Soit A une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$.

7) Etablir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0\leq k\leq r}$ soit liée.

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \ldots, \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

9) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C\|A^n\|$$

Indication : Montrer tout d'abord que

$$N : \sum_{k=0}^{r-1} x_k A^k \mapsto \sum_{k=0}^{r-1} |x_k|$$

est bien définie et est une norme sur $F = \mathrm{Vect}\{I_d, A, \ldots, A^{k-1}\}$.

10) En déduire que pour tout entier k entre 0 et $r-1$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

11) Conclure qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $\phi(A) = P(A)$.

12) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : Calculer A^2.

13) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour qu'il existe P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall M \in M_d(\mathbb{R}), \quad \phi(M) = P(M)$$

Partie III : une application

14) Rappeler l'énoncé permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes.

15) Etendre ce théorème au produit de deux séries de matrices $\sum_{n\geq 0} A_n$ et $\sum_{n\geq 0} B_n$.

Indication : On pourra comparer

$$\left\| \left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right) \right\|$$

à

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \|A_n\|\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \|B_n\|\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} \|A_k\|\,\|B_{n-k}\|\right).$$

16) Pour $(A, B) \in M_d(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(iA)\exp(iB) = \exp(i(A+B))$, où $M \mapsto \exp(iM)$ est la fonction matricielle associée à la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!}$.

17) Pour tout A dans $M_d(\mathbb{R})$ on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} \text{ et } \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

Montrer

$$\forall A \in M_d(\mathbb{R}), \qquad (\cos(A))^2 + (\sin(A))^2 = I_d$$

Partie IV : étude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in R^{*+} \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in]-\infty, \tfrac{M}{2}[^2, \qquad 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \tag{$IV.1$}$$

18) Soit α un nombre strictement inférieur à $\frac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tout x et y dans $]-\infty, \frac{M}{2}[$, avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

19) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, M[$.

20) Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions de $(IV.1)$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

Partie V : étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : M_d(\mathbb{R}) \to M_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in M_d(\mathbb{R}), \qquad f_\xi(A) = (\xi(A_{i,j}))_{1\leq i,j\leq d}$$

On se propose de déterminer les fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in M_d(\mathbb{R}), \qquad A \text{ inversible } \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \tag{V.1}$$

21) Décrire les fonctions continues ξ vérifiant la condition $(V.1)$ lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geq 2$.
On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $(V.1)$.

22) Montrer

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \qquad ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

Indication : On pourra considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}.$$

23) En déduire que ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

24) Montrer que ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$

25) Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, alors il existe un $\alpha > 0$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

26) En déduire $\xi(0) = 0$.

27) Soit $\eta = \xi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \to I$. Montrer que là où cela est défini

$$(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

On suppose dans les quatre questions qui suivent que η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

28) Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ vérifie l'équation $(IV.1)$ sur un intervalle $] - \infty, M[$, avec M (éventuelllement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I.

29) En déduire que sur l'intervalle $I \cap]0, +\infty[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

30) Montrer que sur $I \cap] - \infty, 0[$, la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_2(-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

31) Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que η est une fonction impaire.

On ne supppose plus que η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

32) En déduire dans le cas général que si $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition $(V.1)$, alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}^{*+}$ est de la forme $x \mapsto Cx^\beta$ avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

33) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A_\lambda \in M_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

34) En déduire toutes les fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(V.1)$.