Devoir en temps libre 8, $X - 2015 - MP - B$
Quelques commentaires sur les deux premières parties

Voici quelques commentaires supplémentaires sur ce devoir, motivés par la lecture des copies et des solutions proposés par différents élèves. Ce document est là pour vous aider à faire des devoirs 9a et 9b un travail profitable et à ne pas reproduire dans ces devoirs des erreurs commises dans le devoir que ma maladie m'a empêchée de vous rendre aussi rapidement que je l'aurais souhaité, mais surtout pas assez rapidement pour que vous ayez eu entre vos mains les copies corrigées avant d'attaquer les devoirs 9a et 9b.

2.a)
Il s'agit de prouver, si n est un entier

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha} dt = \circ(x^n)$$

si n est un entier.
J'ai choisi la méthode du changement de variable et d'intégration des relations de comparaison. Voir pour cela la correction complète que j'ai proposée. D'autres ont voulu utiliser le théorème de convergence dominée. (Dans le dernier DS, il y avait une question totalement simimilaire).
Voyons comment rédiger proprement la réponse à l'aide du théorème de convergence dominée.
Il s'agit de prouver

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{\delta}^{+\infty} x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} dt = 0$$

en utilisant le théorème de convergence dominée étendu.
On a déjà

$$\forall t \in [\delta + \infty[\quad \lim_{x \to 0^+} x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} = 0$$

ainsi que la continuité (par morceaux) sur $[\delta + \infty[$, pour tout $x > 0$ de

$$t \mapsto x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}}.$$

Il ne reste plus qu'à obtenir une domination indépendante de x de

$$\left| x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} \right| = \exp(-n \ln x + \alpha \ln t - \frac{t}{x}).$$

La fonction exp étant croissante il suffit d'étudier à t fixé la fonction $\phi_t : x \mapsto -n \ln x + \alpha \ln t - \frac{t}{x}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\phi_t'(x) = \frac{-n}{x} + \frac{t}{x^2}$. Elle atteint donc un maximum en $x = \frac{t}{n}$ et on obtient donc la majration indépendante de x

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \ \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \qquad \left| x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} \right| \leq n^{-n} e^n t^{\alpha - n} = \psi(t).$$

Le problème est que cette fonction ψ n'est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ que si $n - \alpha > 1$.
Il peut être résolu de deux manières différentes.

— On choisit un entier p plus grand que n et $\alpha + 1$. Il en existe au moins un. On a alors

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha} dt = \circ(x^p) = \circ(x^n).$$

Cette technique, basée sur le coup de chance $x^p =_{0^+} \circ(x^n)$ si $p > n$, n'est pas forcément adaptable à d'autres situations.

— Une autre méthode, plus adaptable, consiste à analyser plus précisément les variations de ϕ_t. Cette fonction est croissante sur $]0, \frac{t}{n}]$, or $t \geq \delta$ dans notre domaine d'étude. Donc ϕ_t est croissante sur $]0, \frac{\delta}{n}]$, pour tout $t \geq \delta$. On en déduit

$$\forall x \in]0, \frac{\delta}{n}] \ \forall t \in [\delta, +\infty[\quad \left| x^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} \right| \leq \left(\frac{\delta}{n} \right)^{-n} t^{\alpha} e^{-\frac{nt}{\delta}} = \psi_1(t).$$

Et ψ_1 est bien intégrable sur $[\delta, +\infty[$.

2.c)
Cette question est l'archétype du découpage $\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$. Malgré de nombreux essais durant ce début d'année elle n'est pas encore bien rédigée.
Il s'agit de prouver

$$\int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt = \circ_{x \to 0^+}(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}).$$

Si on revient à la définition cela veut dire :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in]0, \eta[\ \left| \int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

Ceci pourrait s'écrire

$$\epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow \exists \eta > 0 \ \forall x \in]0, \eta[\ \left| \int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

Il s'agit donc essentiellement de démontrer une implication. Or pour démontrer $A \Rightarrow B$ plusieurs techniques sont disponibles :

- Cette implication ressemble beaucoup à un théorème du cours. On vérifie les hypothèses et on conclut.
- Cette implication est une contraposée d'un résultat connu, ou facilement prouvable par une des autres techniques présentées.
- Cette implication se déduit aisément d'implications élémentaires par transitivité $A \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$.
- Les techniques élémentaire précédentes ne s'appliquent pas (c'est le cas ici). On ajoute alors A à la théorie et on montre que B devient un théorème de la théorie. On sait alors que $A \Rightarrow B$ est un théorème de la théorie.
- En dernier recours, on peut appliquer le principe de la démonstration par l'absurde. On rajoute A et $nonB$ à la théorie et on démontre que la théorie contient une contradiction. On peut alors affirmer que $A \Rightarrow B$ est un théorème de la théorie.

C'est pourquoi toutes ces démonstrations utilisant un découpage de ϵ commencent par

$$\text{Soit } \epsilon > 0.$$

On part ensuite à la recherche du η (ou du n_0,etc...).
Pour cela on passe par un paramètre intermédiaire (dans le problème c'est δ) qui va nous donner la moitié du résultat sans contrainte sur x, puis le δ étant fixé on va grâce à une contrainte sur x obtenir l'autre moitié du résultat.
L'architecture d'une telle démonstration est donc :

1. Soit $\epsilon > 0$
2. On affirme l'existence d'un δ qui permet d'avoir la moitié du résultat à $\frac{\epsilon}{2}$ près.
3. On fixe un tel δ, qui dépend de ϵ
4. Un tel δ étant fixé on obtient l'existence du η, qui dépend de ϵ mais aussi du δ choisi (c'est la raison pour laquelle il faut passer par l'étape du choix de δ) et donnant l'autre moitié du résultat à $\frac{\epsilon}{2}$
5. On récapitule pour passer directement du ϵ au η en oubliant le δ intermédiaire. Cette étape est d'autant plus nécessaire que parfois, comme dans le problème ici présent, si l'on suit les notations de l'énoncé, pour un epsilon de départ donné on obtiendra un η associe non pas à ϵ mais à une fonction de ϵ, $f(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ. Pour obtenir le ϵ initialement visé il faudra partir d'un ϵ' tel que $f(\epsilon') < \epsilon$.

Ce schéma n'est pas facile à formaliser, mais nous l'avons déjà vu à plusieurs reprises.

1. Le lemme de Cesàro.
2. Le theorème de permutation des limites.
3. Le théorème de sommation des relations de comparaison.
4. Le théorème d'intégration des relation de comparaison.
5. Le théorème de Weierstrass.

6. Si une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des limites en $\pm\infty$ alors elle est uniformément continue.
7. Dans de nombreuses questions de problèmes en temps libre et en temps limité, en particulier les questions 8 et 9 du sujet 9a (X1999) et question 6 du 9b (X2007).
8. Le théorème d'Abel.

Appliquons le au problème qui nous préoccupe. On veut prouver :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in]0, \eta[\ \left| \int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

— Soit $\epsilon > 0$
— D'après la question 2.b), il existe $\delta > 0$ et une constante C' indépendante de ϵ et de δ tels que

$$\forall x > 0 \quad \left| \int_0^{\delta} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq C' \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

— Fixons un tel δ, soit C' la constante associée.
— D'après la question 2.a, en choisissant un entier n supérieur à $\frac{N+\lambda}{\mu}$, et en revennt à la définition de $\circ$ il existe un η, on en choisit un, tel que

$$\forall x \in]0, \eta[\quad \left| \int_{\delta}^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

— On a donc trouvé un η tel que

$$\forall x \in]0, \eta[\quad \left| \int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \right| \leq (C'+1) \epsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

Couper l'intégrale en deux et utiliser l'inégalité triangulaire
— Si on était parti de $\frac{\epsilon}{C'+1}$ au lieu de ϵ on aurait obtenu exactement le résultat souhaité.

4)
Il s'agit de prouver que

$$\begin{array}{rcccl} F & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-1}\, dt \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Le changement de variable $t = xu$ donne

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -G(\frac{1}{x})$$

où G est une primitive de $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
F est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Néanmoins certains étudiants ont voulu utiliser le théorème sur la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre. La démonstration étant générale et adaptée à d'autres situations (c'est par exemple la rédaction à adopter pour le sujet 9a (X1999), question 6). En voila une rédaction possible.

1. On définit

$$\begin{array}{rcccl} h & : &]0,+\infty[\times[1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & e^{-\frac{t}{x}} t^{-1} \end{array}$$

2. Pour tout x de $]0,+\infty[$ $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$, par exemple car $h_x(t) =_{+\infty} e^{-\frac{t}{2x}}$.
3. Pour tout entier k $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est définie sur $]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, plus précisément on peut montrer par récurrence qu'il existe une fonction polynomiale $P_k(x,t)$ de deux variables telle que

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = \frac{P_k(x,t)}{x^{2k}} e^{-\frac{t}{x}} t^{-1}.$$

   En effet il suffit de prendre $P_0(x,t) = 1$ puis pour $k \geq 0$:

$$P_{k+1} = x^2 \frac{\partial P_k}{\partial x}(x,t) - (2kx - t) P_k(x,t).$$

   On pourrait établir par récurrence que P_k est de degré au plus k en t et en x. Mais ici les valeurs exactes de ces degré sont sans importance. Nous écrirons

$$P_k(x,t) = \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=0}^{n_k} \alpha_{k,i,j} x^i t^j.$$

4. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Pour tout k entier on a :
   — Pour (x,t) de $[a,b] \times [1,+\infty[$ $\frac{\partial^k h}{x^k}(x,t)$ est définie,
   — Pour tout x de $[a,b]$ $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$,
   —

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[\quad \left| \frac{\partial^k h}{x^k}(x,t) \right| \leq \frac{\sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=0}^{n_k} |\alpha_{k,i,j}| b^i t^j}{a^{2k}} e^{-\frac{t}{b}} t^{-1} = \psi_k(t).$$

   Et ψ_k est intégrable sur $[1,+\infty[$, par exemple car $\psi_k(t) = \circ_{+\infty}(e^{-\frac{t}{2b}})$
5. Il résulte de ce qui précède que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$, pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$. De plus pour tout entier k

$$F^{(k)}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\, dt.$$

Les points qui font la différence sont les points 3. et 4., et en cela le sujet X1999 est une bonne occasion de vérifier que la méthode est comprise. Pour les rédiger correctement l'introduction de la notation h en 1. est indispensable pour bien prendre conscience qu'il y a deux variables et pour savoir par rapport à laquelle on dérive.

— Par exemple la notation $\left(e^{-\frac{t}{x}}\right)^{(k)}$ n'a pas de sens car on ne sait pas par rapport à quelle variable on dérive. Il faut écrire $\frac{d^k}{dx^k}e^{-\frac{t}{x}}$.

— Il était possible d'écrire aussi

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = P_k(\frac{1}{x},t)e^{-\frac{t}{x}}t^{-1}.$$

La relation de récurrence devenant

$$P_{k+1}(y,t) = -y^2\frac{\partial P_k}{\partial x}(y,t) + ty^2P_k(y,t).$$

— Certains ont aussi établi, presque correctement, une majoration de $\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|$ sur $[a,b]\times[1,+\infty[$, sous la forme

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq C_k t^{k-1}e^{-\frac{t}{b}}$$

Pour cela on l'établit pour $k=0$ ($C_0=1$), pour $k=1$ ($C_1=\frac{C_0}{a^2}$). On l'étend par récurrence en partant de $\frac{d}{d^x}e^{-\frac{t}{x}}t^-1 = \frac{t}{x^2}e^{-\frac{t}{x}}t^-1$. On dérive k fois par rapport à x en appliqaunt la formule de Leibniz :

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}e^{-\frac{t}{x}}t^-1 = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j(j+1)!t}{x^{j+2}}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}e^{-\frac{t}{x}}t^-1.$$

On obtient bien la majoration voulue avec

$$C_{k+1} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(j+1)!}{a^{j+2}}C_{k-j}.$$