ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2015 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

Les quatre parties sont largement indépendantes les unes des autres.

Première partie

Dans cette partie, on utilisera à plusieurs reprises la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt. \tag{1}$$

On admettra que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1a. Montrer que Γ est bien définie et que pour tout $y > 0$, $y\Gamma(y) = \Gamma(y+1)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

1b. Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\Gamma(y) = y^{-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^y dt$, puis que

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds,$$

où ϕ est la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $\phi(s) = s - \ln(1+s)$.

2. On considère dans cette question une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) il existe un entier $K \geqslant 0$ et un réel $C > 0$ tels que $|f(t)| \leqslant Ct^K$ sur $[1,+\infty[$,

(b) il existe un entier $N \geqslant 0$, deux réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ et des réels $a_0, \ldots, a_N$ tels que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \, t^{(k+\lambda-\mu)/\mu} + o\left(t^{(N+\lambda-\mu)/\mu}\right) \quad \text{quand } t \to 0.$$

On note $\rho_N(t) = f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k t^{(k+\lambda-\mu)/\mu}$ le reste du développement asymptotique de f.

2a. On fixe $\delta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t/x}t^{\alpha}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}t^{\alpha}dt = o(x^n) \quad \text{quand } x \to 0^+.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt = o(x^n) \quad \text{quand } x \to 0^+.$$

2b. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer l'existence de $\delta > 0$ et d'une constante C' indépendante de ε et δ tels que

$$\forall x > 0, \qquad \left|\int_{0}^{\delta} e^{-t/x}\rho_N(t)dt\right| \leqslant C'\varepsilon x^{(N+\lambda)/\mu}.$$

2c. En déduire que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t/x}\rho_N(t)dt = o(x^{(N+\lambda)/\mu}) \quad \text{quand } x \to 0^+.$$

2d. On note F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t/x}f(t)dt.$$

Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie la formule asymptotique suivante :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) x^{(k+\lambda)/\mu} + o\left(x^{(N+\lambda)/\mu}\right) \quad \text{quand } x \to 0^+. \tag{2}$$

3. On rappelle que la fonction ϕ a été définie à la question **1b**.

3a. Tracer le graphe de ϕ. Montrer que ϕ définit par restriction aux intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ respectivement

- une bijection $\phi_- :]-1, 0[\to]0, +\infty[$,
- une bijection $\phi_+ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$.

On notera $\phi_-^{-1} :]0, +\infty[\to]-1, 0[$ et $\phi_+^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ les bijections réciproques.

3b. Montrer que si $s \in]-1, 1[$,

$$\phi(s) = s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} s^k.$$

On admet l'existence de deux séries entières $\sum_{k\geqslant 1} b_k q^k$ et $\sum_{k\geqslant 1} c_k q^k$, de la variable q, et de rayon de convergence strictement positif, où $b_1 > 0$ et $c_1 < 0$, et telles que l'on ait, pour q dans un voisinage de 0 dans $[0, +\infty[$,

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k\right) = \phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k\right) = q^2.$$

3c. Calculer b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2 et c_3. En déduire les développements asymptotiques suivants quand $q \to 0$, $q > 0$, pour les fonctions ϕ_-^{-1} et ϕ_+^{-1} ainsi que leurs dérivées :

$$\phi_+^{-1}(q) = \sqrt{2q} + \frac{2q}{3} + \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2}), \quad \phi_-^{-1}(q) = -\sqrt{2q} + \frac{2q}{3} - \frac{q^{3/2}}{9\sqrt{2}} + o(q^{3/2}),$$

$$(\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q}), \quad (\phi_-^{-1})'(q) = -\frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}} + o(\sqrt{q}).$$

3d. Montrer que

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^\infty e^{-yq} \left((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q) \right) dq.$$

3e. En déduire que

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\frac{2\pi}{y} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12\, y} + o\left(\frac{1}{y} \right) \right) \quad \text{quand } y \to +\infty.$$

Deuxième partie

On considère dans cette partie la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-1}\, dt.$$

On va voir qu'une série divergente peut être utile pour calculer une valeur approchée de F en un point particulier.

4. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$r_N(x) = (-1)^N\, N!\, x^{N+1}\, e^{-1/x},$$
$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1}\, (k-1)!\, x^k\, e^{-1/x},$$
$$R_N(x) = (-1)^N\, N!\, x^N \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-(N+1)}\, dt.$$

5. Montrer que, pour tout $N \geqslant 1$ et tout $x > 0$, $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

6a. Préciser le domaine de convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1}\, (k-1)!\, x^k$ et montrer que la suite $(R_N(x))_{N \geqslant 1}$ n'est pas bornée.

6b. Montrer que, si $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$|R_N(x)| \leqslant |r_N(x)|.$$

En déduire que $R_{N+1}(x) = o(r_N(x))$ quand $x \to 0$.

6c. Montrer que le reste est de l'ordre du premier terme négligé, c'est-à-dire que pour tout $N \geqslant 1$,

$$R_N(x) \sim r_N(x) \quad \text{quand} \quad x \to 0.$$

6d. Montrer que, pour $0 < x < 1/2$, la suite $(|r_N(x)|)_{N\geqslant 1}$ est décroissante jusqu'à un certain rang, puis croissante. (On ne demande pas de montrer cela pour la suite $(|R_N(x)|)_{N\geqslant 1}$.)

Quand on utilise $S_N(x)$ comme valeur approchée de $F(x)$, on dit que l'erreur relative est

$$E_N(x) = \left|\frac{R_N(x)}{F(x)}\right|.$$

7a. Montrer que, si N est pair : $N = 2M$ avec $M \geqslant 1$, et si $0 < x \leqslant 1/N$, on a $S_N(x) \geqslant 0$ et

$$E_N(x) \leqslant \frac{N!\, x^{N+1}}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M-1} (1-(2\ell+1)x)\,(2\ell)!\, x^{2\ell+1}}.$$

7b. Vérifier que $E_4\left(\dfrac{1}{10}\right) \leqslant 3\,.\,10^{-3}$.

Troisième partie

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On considère l'espace $\mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continues et 1-périodiques en chacune de leurs variables, c'est-à-dire que si l'on note e_j les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d,\ \forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad f(\theta + e_j) = f(\theta).$$

$\mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^d)$ est muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^d} |f(\theta)|.$$

On appelle polynôme trigonométrique (en d variables) toute fonction de la forme

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \mapsto \sum_{k \in K} c_k e^{2i\pi k\cdot\theta},$$

où K est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ et on a noté pour $k = (k_1, , \dots, k_d)$, $k \cdot \theta = k_1\theta_1 + \cdots + k_d\theta_d$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$; la norme associée est notée $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que les polynômes trigonométriques en d variables sont denses dans $\mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que si on se donne $f \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique Q tel que

$$\|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On admet que ce résultat est vrai en dimension $d = 1$, et on va en déduire la preuve dans le cas de la dimension $d = 2$. On constatera qu'elle se généralise aisément à toutes les dimensions $d \geqslant 2$.

Dans toute la suite de cette partie, on se place donc en dimension $d = 2$. On introduit le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ de $\mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$ constitué des fonctions de la forme

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(\theta_1) g_i(\theta_2),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

8. Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $\mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$.

On considère, pour $j \geqslant 2$ un entier, la fonction $\psi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique définie sur $]-1/2, 1/2]$ par

$$\forall t \in \left]-1/2, 1/2\right], \quad \psi_j(t) = \max(0, 1 - j|t|).$$

En outre, pour les entiers $0 \leqslant k < j$, on définit les fonctions $\psi_{j,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_{j,k}(t) = \psi_j\left(t - \frac{k}{j}\right).$$

9. Montrer que $\psi_{j,k} \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

10. On se donne $f \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$ et $j \geqslant 2$ un entier, et on pose

$$S_j(f)(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}(\theta_1) \psi_{j,k_2}(\theta_2).$$

10a. Montrer que $S_j(f) \in \mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ et coïncide avec f aux points $\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right)$ pour $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2$.

10b. Soient $j \geqslant 2$, k_1 et k_2 deux entiers tels que $0 \leqslant k_1, k_2 < j$, et

$$\theta \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1 + 1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2 + 1}{j}\right[.$$

Exprimer $Sj(f)(\theta)$ comme un barycentre des points $f\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right)$ où $\ell_1 \in \{k_1, k_1 + 1\}$ et $\ell_2 \in \{k_2, k_2 + 1\}$. En déduire que $\|S_j(f) - f\|_\infty \to 0$ quand $j \to +\infty$.

11. Conclure que l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $\mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$.

Quatrième partie

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions continues et 1-périodiques en chacun de leurs arguments, et $\omega \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$ deux paramètres. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} F'(t) = f(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) = \omega + xg(\alpha(t)) \end{cases} \tag{3}$$

assorti des conditions initiales $F(0) = 0$ et $\alpha(0) = (0,0)$, où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont les fonctions inconnues.

Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est continue, on admet que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1.$$

On note cette quantité $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \varphi(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$ et on l'appelle *moyenne* de φ.

On suppose dans toute la suite que f est de moyenne nulle, c'est-à-dire

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 0.$$

On commence par supposer $x = 0$.

12. Déterminer l'unique solution (F, α) du système (3) avec conditions initiales $F(0) = 0$ et $\alpha(0) = (0,0)$.

Le vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ est dit *résonnant* s'il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0.$$

13. Montrer que, si ω est résonnant, il existe une fonction f pour laquelle $F(t) = t$.

14. Supposons que ω n'est pas résonnant.

14a. Montrer que, si f est un polynôme trigonométrique, alors F est bornée sur $\mathbb{R}$.

14b. Montrer que plus généralement, si $f \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$, alors $F(t) = o(t)$ quand $t \to +\infty$.

15. On suppose désormais $x \neq 0$ (mais proche de 0). L'expression déterminée dans la question **12** n'est généralement plus une solution.

On suppose donnée une solution $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$: l'objectif de cette dernière question est d'en obtenir un développement asymptotique. Pour cela, on considère une nouvelle fonction inconnue $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de la forme

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + xh(\alpha(t)),$$

où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction auxiliaire judicieusement choisie. On cherche h qui soit 1-périodique en chacun de ses arguments, de classe $\mathscr{C}^1$ et de moyenne nulle, et que de plus, pour un certain $\nu \in \mathbb{R}^2$, elle satisfasse l'équation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2, \quad dh(\theta) \cdot \omega + g(\theta) = \nu. \tag{4}$$

(On a noté dh la différentielle de h).

15a. Déterminer ν en fonction de g. Dans le cas où les deux composantes g_1 et g_2 de g sont des polynômes trigonométriques, en déduire l'existence d'une solution h de l'équation (4), que l'on explicitera.

Dans la suite, on suppose g de classe $\mathscr{C}^1$, et on admet l'existence d'une telle solution h.

15b. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\tilde{\alpha}'(t) = \omega + x\nu + x\varepsilon(x, t)$$

et $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\| \to 0$ quand $x \to 0$.

15c. Soit $T > 0$ fixé. Montrer qu'il existe une fonction $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\alpha(t) = (\omega + x\nu)\, t + x(h(0, 0) - h(\omega t)) + x\eta(x, t)$$

et $\sup_{t\in[0,T]} \|\eta(x, t)\| \to 0$ quand $x \to 0$.

* *
*