Polytechnique 2009,
MP, deuxième composition.
Corrigé

Partie I

Question 1 $\chi_{T_\lambda} = X^2 - \lambda X + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = \lambda^2 - 4$.
◇ Lorsque $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $|\lambda| \neq 2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), T_λ possède deux valeurs propres distinctes, notées μ_λ et μ'_λ. Ainsi T_λ est diagonalisable. De plus $\mu_\lambda \mu'_\lambda = det(T_\lambda) = 1$.
◇ Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Soit $\beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} T_\lambda(e_1 + \beta e_2) = \mu(e_1 + \beta e_2) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu\beta \end{pmatrix} \\ &\iff (\beta = \mu \ \text{ et } \ -1 + \lambda\beta = \mu\beta) \\ &\iff (\beta = \mu \ \text{ et } \ \chi_{T_\lambda}(\mu) = 0). \end{aligned}$$

Question 1.a On suppose que $|\lambda| > 2$.
Alors $\mu_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{\Delta}}{2}$, lorsque $\lambda > 0$ et $\mu_\lambda = \dfrac{\lambda - \sqrt{\Delta}}{2}$, lorsque $\lambda < 0$, $f_{\lambda,1} = e_1 + \mu_\lambda e_2$ et $f_{\lambda,2} = e_1 + \mu_\lambda^{-1} e_2$.

Question 1.b On suppose que $|\lambda| < 2$: $\Delta < 0$, donc $\mu'_\lambda = \overline{\mu_\lambda}$,
ainsi $1 = \mu_\lambda \mu'_\lambda = |\mu_\lambda|^2$, ce qui montre que $|\mu_\lambda| = 1$.
On a $\mu_\lambda = \dfrac{\lambda + i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $f_{\lambda,1} = e_1 + \mu_\lambda e_2$ et $f_{\lambda,2} = e_1 + \mu_\lambda^{-1} e_2$.

Question 1.c On suppose que $\lambda = 2$.
$\chi_{T_2} = (X-1)^2$. Donc on pose encore $f_{2,1} = e_1 + e_2$.
Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. Posons $f_{2,2} = e_1 + \gamma e_2$.

$$\begin{aligned} T_2 f_{2,2} = f_{2,1} + f_{2,2} &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff (\gamma = 2 \ \text{ et } \ -1 + 2\gamma = 1 + \gamma) \\ &\iff \gamma = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{2,2} = e_1 + 2e_2$.

Question 1.d On suppose que $\lambda = -2$.
$\chi_{T_{-2}} = (X+1)^2$. Donc on pose encore $f_{-2,1} = e_1 - e_2$.
Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. Posons $f_{-2,2} = e_1 + \gamma e_2$.

$$\begin{aligned} T_{-2} f_{-2,2} = f_{-2,1} - f_{-2,2} &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\iff (\gamma = 0 \ \text{ et } \ -1 - 2\gamma = -1 - \gamma) \\ &\iff \gamma = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{-2,2} = e_1$.

Partie II

Question 2.a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) &\iff \forall k \in \mathbb{Z}\ \ (Ax)_k - \lambda x_k = 0 \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z}\ \ x_{k+1} - \lambda x_k + x_{k-1} = 0 \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z}\ \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\diamond$ Supposons que $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E)$. Par récurrence sur k, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\begin{pmatrix} x_{-k-1} \\ x_{-k} \end{pmatrix} = T_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} x_{-k} \\ x_{-k+1} \end{pmatrix}$, donc toujours par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_{-k} \\ x_{-k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^{-k} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, lorsque $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E)$, on a montré que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = T_\lambda T_\lambda^{k-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = T_\lambda \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}$.

On a donc établi l'équivalence demandée.

Question 2.b

L'application φ, de $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E)$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ est linéaire et elle est bijective, car pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique famille de complexes $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant la relation : $\forall k \in \mathbb{Z}\ \ x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1}$.

Ainsi, φ est un isomorphisme, ce qui prouve que $dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E)) = 2$.

Question 3.a

On suppose que $|\lambda| \neq 2$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} &= T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= T_\lambda^k (\alpha_{\lambda,1} f_{\lambda,1} + \alpha_{\lambda,2} f_{\lambda,2}) \\ &= \alpha_{\lambda,1} \mu_\lambda^k \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_\lambda \end{pmatrix} + \alpha_{\lambda,2} \mu_\lambda^{-k} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_\lambda^{-1}, \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc en égalant les premières coordonnées, on obtient : $x_k = \alpha_{\lambda,1} \mu_\lambda^k + \alpha_{\lambda,2} \mu_\lambda^{-k}$.

Question 3.b

On suppose que $\lambda = 2$. On peut reprendre le même calcul.

On a $\mathrm{mat}(T_\lambda, (f_{2,1}, f_{2,2})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M$: $M = I_2 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$.

Or I_2 et N commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = I_2 + kN$. De plus $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha_{2,1} f_{2,1} + \alpha_{2,2}(k f_{2,1} + f_{2,2}) = \alpha_{2,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{2,2}(k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, donc $x_k = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}(k+1)$.

Question 3.c

On suppose que $\lambda = -2$. Avec les mêmes notations, $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on obtient, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} &= \alpha_{-2,1}(-1)^k f_{-2,1} + \alpha_{-2,2}(k(-1)^{k-1} f_{-2,1} + (-1)^k f_{-2,2}) \\ &= \alpha_{-2,1}(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_{-2,2}(k(-1)^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \end{aligned}$$

donc $x_k = \alpha_{-2,1}(-1)^k + \alpha_{-2,2}(-1)^k(1-k)$.

Question 4

$\diamond$ Supposons d'abord que $\lambda = 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E)$. D'après 3.b, si $\alpha_{2,2} \neq 0$, alors $|x_k| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (x_k) n'est pas périodique.

Mais si $\alpha_{2,2} = 0$, alors la famille $(x_k)_{k \in Z}$ est constante, donc elle est dans P_N.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - 2Id_E) \cap P_N = Vect(\mathbf{1})$, où $\mathbf{1}$ désigne la suite constante égale à 1.

$\diamond$ Lorsque $\lambda = -2$, un raisonnement similaire montre que

$\mathrm{Ker}(A - 2Id_E) \cap P_N = \begin{cases} \{0\} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \mathrm{Vect}(((-1)^k)_{k \in \mathbb{Z}}) & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$.

$\diamond$ Si $|\lambda| > 2$, on sait que $|\mu_\lambda| > 1$, donc d'après 3.a, si $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \setminus \{0\}$, alors $|x_k|$ tend vers 0 ou $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$, donc $x \notin P_N$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap P_N = \{0\}$.

$\diamond$ Supposons maintenant que $|\lambda| < 2$ et que $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap P_N \neq \{0\}$.

Considérons $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap P_N$ avec $x \neq 0$. Il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $x_h \neq 0$.

On a $\begin{pmatrix} x_h \\ x_{h+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{h+N} \\ x_{h+N+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^N \begin{pmatrix} x_h \\ x_{h+1} \end{pmatrix}$, donc $1 \in Sp(T_\lambda^N)$.

D'après 1.b, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\mu_\lambda = \dfrac{\lambda + i\sqrt{-\Delta}}{2} = e^{i\theta}$, donc $\theta = \mathrm{Arcos}(\dfrac{\lambda}{2})$.

D'après 1.b, T_λ est diagonalisable et $Sp(T_\lambda) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$, donc $Sp(T_\lambda^N) = \{e^{iN\theta}, e^{-iN\theta}\}$.

Ainsi, $1 = e^{iN\theta}$, donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{2m\pi}{N}$. De plus $\theta \in [0, \pi]$, donc $m \in \{0, \ldots, E(\dfrac{N}{2})\}$, où E désigne la partie entière.

On a donc montré que si $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap P_N$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors il existe $m \in \{0, \ldots, E(\dfrac{N}{2})\}$ tel que $\lambda = 2\cos(\dfrac{2h\pi}{N})$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $m \in \{0, \ldots, E(\dfrac{N}{2})\}$ tel que $\lambda = 2\cos(\dfrac{2h\pi}{N})$.

Alors T_λ^N est diagonalisable et sa seule valeur propre est 1, donc $T_\lambda^N = I_2$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap P_N = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) = \mathrm{Vect}((\mu_\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mu_\lambda^{-k})_{k\in\mathbb{Z}})$, où $\mu_\lambda = e^{\frac{2ih\pi}{N}}$.

Partie III

Question 5

Remarque : La notation $\sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k$ lorsque $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille de complexes n'est pas officiellement au programme, même si elle est classique en théorie des séries de Fourier. Cette quantité est définie et vérifie de bonnes propriétés lorsque $\sum_{k\geq 0} z_k$ et $\sum_{k\leq 0} z_{-k}$ sont absolument convergentes : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k = \sum_{k\geq 0} z_k + \sum_{k<0} z_{-k} = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=-K}^{K} z_k$.

$\diamond$ Soit $x \in E_1$ et $u \in E_\infty$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|x_k u_k| \leq \|u\|_\infty |x_k|$, donc $\sum_{k\geq 0} x_k u_k$ et $\sum_{k\leq 0} x_{-k} u_{-k}$ sont absolument convergentes. Ainsi, $< x, u >$ est correctement défini.
De plus, les propriétés de linéarité sur les sommes de séries montrent que $x \longmapsto < x, u >$ et $u \longmapsto < x, u >$ sont des formes linéaires.
$\diamond$ Soit $u \in E_\infty$. Notons $\varphi_u = (x \longmapsto < x, u >)$. Pour tout $x \in E_1$,

$$(**) \quad |\varphi_u(x)| = |< x, u >| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u\|_\infty |x_k| = \|u\|_\infty \|x\|_1,$$

donc φ_u est une forme linéaire continue et $\|\varphi_u\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |\varphi_u(x)| \leq \|u\|_\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $|u_h| > \|u\|_\infty - \varepsilon$. Prenons $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\delta_{h,k})_{k\in\mathbb{Z}} \in E_1$.
On a $\|u\|_\infty - \varepsilon < |u_h| = |\varphi_u(x)| \leq \|\varphi_u\| \|x\|_1 = \|\varphi_u\|$,
donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \|\varphi_u\|$, donc $\|u\|_\infty \leq \|\varphi_u\|$.
En conclusion, φ_u est continue et $\|\varphi_u\| = \|u\|_\infty$.
$\diamond$ Fixons maintenant $x \in E_1$ et notons $\Psi_x = (u \longmapsto < x, u >)$.
D'après $(**)$, Ψ_x est une forme linéaire continue et $\|\Psi_x\| \leq \|x\|_1$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_k = 0$, posons $u_k = 1$ et pour $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_k \neq 0$, posons $u_k = \frac{\overline{x_k}}{|x_k|}$. On définit ainsi $u \in E_\infty$, et $\|x\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| = \Psi_x(u) \leq \|\Psi_x\| \|u\|_\infty = \|\Psi_x\|$, donc $\|\Psi_x\| = \|x\|_1$.

Question 6

$\diamond$ Pour tout $x \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$(*) \quad |(Ax)_k| \leq |x_{k-1}| + |x_{k+1}|,$$

donc lorsque $x \in E_1$, $\sum_{k\geq 0} |(Ax)_k|$ et $\sum_{k\leq 0} |(Ax)_k|$ convergent, ce qui montre que $Ax \in E_1$ et lorsque $x \in E_\infty$, $|(Ax)_k| \leq 2\|x\|_\infty$, ce qui montre que $Ax \in E_\infty$. Ainsi, $A(E_1) \subset E_1$ et $A(E_\infty) \subset E_\infty$.

◇ De plus, la dernière inégalité montre, en passant à la borne supérieure, que $\|Ax\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$, donc A_∞ est continu et $\|A_\infty\| \leq 2$.
Posons $y = (\delta_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$. $y \in E_\infty$, $\|y\|_\infty = 1$ et $\|Ay\|_\infty = 2$, donc $\|A_\infty\| = 2$.

◇ Soit $x \in E_1$. L'inégalité $(*)$ montre que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |(Ax)_k| \leq \sum_{k=-1}^{+\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ et $\displaystyle\sum_{k<0} |(Ax)_k| \leq \sum_{k\leq -2} |x_k| + \sum_{k\leq 0} |x_k|$, donc par sommation, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(Ax)_k| \leq 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$, puis, par inégalité triangulaire, $\|Ax\|_1 \leq 2\|x\|_1$.
Ainsi A_1 est continu et $\|A_1\| \leq 2$.
En réutilisant l'élément y de paragraphe précédent, on montre que $\|A_1\| = 2$.

Question 7.a

◇ Notons S l'application de E dans E définie par :
pour tout $x \in E$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(Sx)_k = x_{k+1}$.
Alors $A = S + S^{-1}$, or S et S^{-1} sont des endomorphismes de E qui commutent, donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$A^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} S^p S^{-(n-p)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} S^{2p-n}.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$, $(A^n x)_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x_{k+2p-n}$.

◇ *Petite erreur d'énoncé :* Il faut supposer que $x \in E_1$.
$A(E_1) \subset E_1$, donc $A^n x \in E_1$. De plus, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(A^n x)_k| = \|A_1^n x\|_1 \leq \|A_1^n\| \|x\|_1$.
D'après le cours, pour tout couple (B, C) d'endomorphismes continus de E_1, on sait que $\|BC\| \leq \|B\|\|C\|$. Par récurrence sur n, on en déduit que $\|A_1^n\| \leq \|A_1\|^n = 2^n$, donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(A^n x)_k| \leq 2^n \|x\|_1$.

Question 7.b

Remarque : Pour traiter cette question, je ne vois pas comment éviter de parler de séries sur un espace de dimension infinie et d'utiliser que sur un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente. Ce résultat n'est pas officiellement au programme. On pourrait bien sûr le redémontrer en passant par les suites de Cauchy et le critère de Cauchy pour les séries ...

◇ Montrons que E_1 est complet.
Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E_1 (pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$).
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|x^p - x^q\|_1 \leq \varepsilon$.
Fixons $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $|x_k^p - x_k^q| \leq \|x_k^p - x_k^q\|_1 \leq \varepsilon$. Ainsi, $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de complexes, or $\mathbb{C}$ est complet, donc il existe $l_k \in \mathbb{C}$ tel que $x_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_k$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe toujours $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|x^p - x^q\|_1 \leq \varepsilon$.
Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $p \geq N$.
Pour tout $q \geq N$, $\displaystyle\sum_{k=-K}^{K} |x_k^p - x_k^q| \leq \|x^p - x^q\|_1 \leq \varepsilon$, donc en faisant tendre q vers $+\infty$,

on obtient : $\displaystyle\sum_{k=-K}^{K} |x_k^p - l_k| \leq \varepsilon$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k^p - l_k|$ est défini et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k^p - l_k| \leq \varepsilon$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|l_k| \leq |l_k - x_k^N| + |x_k^N|$, donc $l = (l_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E_1$ et ce qui précède montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$, $\|x^p - l\|_1 \leq \varepsilon$. Ainsi $x^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} l \in E_1$, ce qui montre que E_1 est un espace de Banach.

◇ Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 2$ et $x \in E_1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\lambda^{-n} A_1^n x\|_1 \leq |\lambda|^{-n} \|A_1\|^n \|x\|_1 = (\dfrac{2}{|\lambda|})^n \|x\|_1$.

$\dfrac{2}{|\lambda|} \in [0, 1[$, donc la série $\displaystyle\sum_n (\frac{2}{|\lambda|})^n \|x\|_1$ converge. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_n \lambda^n A_1^n x$ est absolument convergente dans l'espace complet E_1, donc elle converge et on peut noter $B_\lambda x$ sa somme.

En passant aux sommes partielles, on montre facilement que B_λ est linéaire.

◇ Notons $C = Id_{E_1} - \dfrac{1}{\lambda} A_1$ et soit $x \in E_1$.

$CB_\lambda x = C \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda^{-n} A_1^n x = \lim_{N\to+\infty} C \sum_{n=0}^{N} \lambda^{-n} A_1^n x$, car C est continue d'après la question 6.

Ainsi, $CB_\lambda x = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (\lambda^{-n} A_1^n x - \lambda^{-n-1} A_1^{n+1} x) = \lim_{N\to+\infty} (x - \lambda^{-N-1} A_1^{N+1} x) = x$, car

$\|\lambda^{-N-1} A_1^{N+1} x\|_1 \leq (\dfrac{2}{|\lambda|})^{N+1} \|x\|_1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $CB_\lambda = Id_{E_1}$.

De plus, $B_\lambda(Cx) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} A_1^n (x - \frac{1}{\lambda} A_1 x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda^{-n} A_1^n x - \lambda^{-n-1} A_1^{n+1} x) = x$, donc $B_\lambda C = Id_{E_1}$.

On a montré que B_λ est un automorphisme de E_1, avec $B_\lambda^{-1} = Id_{E_1} - \dfrac{1}{\lambda} A_1$.

Question 8.a

◇ Si $|\lambda| > 2$, la question précédente montre que $A_1 - \lambda Id_{E_1}$ est un automorphisme, donc $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \{0\}$.

Pour la suite, remarquons que $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap E_1$.

Supposons maintenant que $\lambda = 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$. Ainsi, $x \in E_1$ et, d'après la question 3.b, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = \alpha + (k+1)\beta$.

Si $\beta \neq 0$, $|x_k| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux car $x \in E_1$, donc $\beta = 0$ et $x_k = \alpha$. Mais $x \in E_1$, donc $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui impose $\alpha = 0$ puis $x = 0$.

Ainsi, lorsque $\lambda = 2$, $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \{0\}$.

De même, à l'aide de la question 3.c, lorsque $\lambda = -2$,
on montre encore que $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \{0\}$.

◇ Supposons maintenant que $|\lambda| < 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$.

Il existe un complexe $\mu = e^{i\theta}$ de module 1 et de partie imaginaire > 0, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = \alpha\mu^k + \beta\mu^{-k}$.
Si $|\alpha| > |\beta|$, alors $|x_k| \geq |\alpha\mu^k| - |\beta\mu^{-k}| = |\alpha| - |\beta| > 0$, donc x_k ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui est faux.
Si $|\alpha| < |\beta|$, on aboutit à une contradiction analogue, donc $|\alpha| = |\beta|$.
Posons $\alpha = \gamma e^{i\varphi_1}$ et $\beta = \gamma e^{i\varphi_2}$, où $\gamma \in \Re_+$ et $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} x_k &= \gamma(e^{i\varphi_1 + k\theta} + e^{i\varphi_2 - k\theta}) \\ &= \gamma e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}+k\theta} + e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}-k\theta}) \\ &= 2\gamma e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} + k\theta\right), \end{aligned}$$

or $x \in E_1$, donc $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, en supposant que $\gamma \neq 0$, et en posant $\varphi = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$,
on obtient que $\cos(\varphi + k\theta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors $\cos(\varphi+(k+1)\theta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or $\cos(\varphi+(k+1)\theta) = \cos(\varphi+k\theta)\cos\theta - \sin(\varphi+k\theta)\sin\theta$, donc $\sin\theta\sin(\varphi + k\theta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $\sin^2(\varphi + k\theta) = 1 - \cos^2(\varphi + k\theta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\sin\theta = 0$, puis $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, puis $\mu = e^{i\theta} \in \{1, -1\}$, ce qui est faux car la partie imaginaire de μ est > 0.
Ainsi $\gamma = 0$.
En conclusion, on a montré que, pour tout réel λ, $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \{0\}$.

Question 8.b

$\diamond$ Supposons que $|\lambda| > 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap E_\infty$.
D'après 3.a, il existe $\mu \in]1, +\infty[$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = \alpha\mu^k + \beta\mu^{-k}$.
Si $\alpha \neq 0$, lorsque k tend vers $+\infty$, $|x_k| \sim |\alpha|\mu^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est faux car $x \in E_\infty$, donc $\alpha = 0$.
Si $\beta \neq 0$, lorsque k tend vers $-\infty$, $|x_k| \sim |\beta|\mu^{-k} \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est faux donc $\beta = 0$.
Ainsi, $x = 0$: $\mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) = \{0\}$.
$\diamond$ Supposons que $|\lambda| < 2$. D'après 3.b, $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \subset E_\infty$, donc
$\mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) = E_\infty = \mathrm{Vect}((\mu_\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mu_\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}})$.
$\diamond$ Si $\lambda = 2$, la question 3.b montre que
$\mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap E_\infty = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$.
$\diamond$ Si $\lambda = -2$, la question 3.c montre que
$\mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_E) \cap E_\infty = \mathrm{Vect}(((-1)^k)_{k\in\mathbb{Z}})$.

Question 9

$\diamond$ Si $|\lambda| > 2$, $A_1 - \lambda Id_{E_1}$ est un automorphisme, donc $\mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = E_1$ est dense dans E_1.
$\diamond$ Sinon $|\lambda| \leq 2$, et d'après la question précédente, il existe $u \in \mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty}) \setminus \{0\}$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$. Il existe $y \in E_1$ tel que $x = A_1 y - \lambda y$.

$$< Ay, u >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (y_{k+1} + y_{k-1})u_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k u_{k+1} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k u_{k-1} =< y, Au >= \lambda < y, u >,$$

car $u \in \mathrm{Ker}(A_\infty - \lambda Id_{E_\infty})$.

Ainsi, $< x, u >=< Ay - \lambda y, u >= 0$, pour tout $x \in \mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$.
Ceci démontre que $\mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) \subset u^\perp$,
mais $u^\perp = \{x \in E_1 / < x, u >= 0\} = \varphi_u^{-1}(\{0\})$, or $\{0\}$ est fermé et φ_u est continue, donc $u^\perp$ est fermé. Ainsi, $\overline{\mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1})} \subset u^\perp \neq E_1$ (en effet, $u \neq 0$, donc il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $u_h \neq 0$ et $x = (\delta_{h,k})_{k\in\mathbb{Z}} \in E_1 \setminus u^\perp$).
En conclusion, on a montré que $\mathrm{Im}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$ est dense dans E_1 si et seulement si $|\lambda| > 2$.

Partie IV

Question 10

$\diamond$ *Montrons que φ_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|x_k e^{ikt}| + |x_{-k} e^{-ikt}| = |x_k| + |x_{-k}|$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ikt}$ est définie. De plus, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x_k e^{ikt} + x_{-k} e^{-ikt}| \leq |x_k| + |x_{-k}|$, donc la série d'applications de terme général $t \longmapsto x_k e^{ikt} + x_{-k} e^{-ikt}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la continuité des $t \longmapsto x_k e^{ikt} + x_{-k} e^{-ikt}$ implique la continuité de φ_x.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_x(t) e^{-int} dt$ est un coefficient de Fourier de φ_x. Démontrons que c'est bien x_n.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_x(t) e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, où, pour $k > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $f_k(t) = e^{-int}(x_k e^{ikt} + x_{-k} e^{-ikt})$.

$|f_k(t)| \leq |x_k| + |x_{-k}|$, donc $\sum f_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, 2\pi]$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur $[0, 2\pi]$, donc on peut intervertir $\displaystyle\int_0^{2\pi}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_x(t) e^{-int} dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = 2\pi x_n.$$

Question 11

$$\varphi_{A_1 x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k-1} + x_{k+1}) e^{ikt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{i(k+1)t} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{i(k-1)t} = 2\cos t \varphi_x(t).$$

Question 12

Notons $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on munit de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
Notons φ l'application de E_1 dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $\varphi(x) = \varphi_x$.
φ est linéaire et, pour tout $x \in E_1$, $\|\varphi_x\|_\infty \leq \|x\|_1$, donc φ est continue.

Ainsi, $\varphi_{B_\lambda x} = \varphi(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \lambda^{-n} A_1^n x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \lambda^{-n} \varphi_{A_1^n x}$.
D'après la question précédente,

$$\varphi_{B_\lambda x} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{2\cos}{\lambda}\right)^n \varphi_x.$$

Cette dernière limite est relative à la norme de la convergence uniforme dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, donc il y a en particulier convergence simple. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$\varphi_{B_\lambda x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2\cos t}{\lambda}\right)^n \varphi_x(t) = \varphi_x(t) \frac{1}{1 - \frac{2\cos t}{\lambda}}$.

Question 13 Soit $x \in \mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2\cos t \varphi_x(t) = \varphi_{A_1 x}(t) = \varphi_{\lambda x}(t) = \lambda \varphi_x(t)$,
donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_x(t) = 0$ ou $2\cos t = \lambda$.
Mais si $\left|\frac{\lambda}{2}\right| \leq 1$, $2\cos t = \lambda \Longleftrightarrow \cos t = \frac{\lambda}{2} \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ t = 2k\pi \pm \mathrm{Arcos}\frac{\lambda}{2})$
et si $\left|\frac{\lambda}{2}\right| > 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2\cos t \neq \lambda$.
Ainsi, dans tous les cas, en utilisant éventuellement la continuité de φ_x, on montre que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_x(t) = 0$.
Alors, d'après la question 10, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = 0$.
On a bien redémontré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(A_1 - \lambda Id_{E_1}) = \{0\}$.