X, première composition MP 2008

Corrigé rédigé par Denis Choimet

L'auteur remercie par avance les lecteurs qui voudront bien lui signaler les erreurs contenues dans ce corrigé.

Première partie

1.a) Fixons $a \in [0,1]$. La fonction identiquement nulle est solution de $(D_{p,q})$, et elle est nulle en a ainsi que sa dérivée. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, une solution non identiquement nulle y de $(D_{p,q})$ ne peut vérifier les mêmes conditions initiales. Donc $\boxed{(y(a), y'(a)) \neq (0,0) \text{ pour tout } a \in [0,1]}$.

1.b) Soit a un zéro de y. D'après 1.a), $y'(a) \neq 0$, donc $y(x) \underset{x \to a}{\sim} y'(a)(x-a)$. Cela prouve que, dans un voisinage de a, y ne s'annule qu'en a, autrement dit que les zéros de y sont isolés.
Supposons un instant l'ensemble des zéros de y infini. On peut alors former une suite injective $(z_n)_{n \geq 0}$ de zéros de y. Comme $[0,1]$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers $a \in [0,1]$. y étant continue en a, a est un zéro de y, qui n'est pas isolé : contradiction.

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } y \text{ est fini}}.$$

Remarque : l'argument peut se résumer ainsi : un espace métrique compact dont la topologie est discrète est fini.

2.a) On va éviter le raisonnement par l'absurde préconisé par le texte. Considérons le wronskien $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ de y_1 et y_2. Comme y_1 et y_2 sont des solutions indépendantes de $(D_{p,q})$, W ne s'annule pas sur $[0,1]$, et est donc de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Pour la même raison, y_1 est de signe constant sur $]a,b[$; quitte à changer y_1 en $-y_1$, on peut supposer ce signe strictement positif, ce qui oblige[1] $y_1'(a) > 0$ et $y_1'(b) < 0$. D'autre part,

$$W(a) = -y_1'(a) y_2(a) \text{ et } W(b) = -y_1'(b) y_2(b).$$

On déduit de tout cela que $y_2(a) y_2(b) < 0$.

$$\boxed{y_2 \text{ admet donc au moins un zéro dans }]a,b[}.$$

2.b) Si jamais y_2 admettait deux zéros c et d, qu'on peut supposer consécutifs, dans $]a,b[$, d'après 2.a) y_1 admettrait un zéro dans $]c,d[\subset]a,b[$, ce qui est absurde. $\boxed{y_2 \text{ admet donc un unique zéro dans }]a,b[}$.

[1] Ces dérivées ne peuvent être nulles d'après 1.a)

3.a) On calcule, en tenant compte du fait que y_1 et y_2 sont solutions de $(D_{p,q})$:

$$\begin{aligned}
y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) &= y_1(uy_2'' + u'y_2' + vy_2) - y_2(uy_1'' + u'y_1' + vy_1) \\
&= y_1((u' - pu)y_2' + (v - qu)y_2) - y_2((u' - pu)y_1' + (v - qu)y_1) \\
&= \boxed{(u' - pu)W}.
\end{aligned}$$

3.b) Fixons $(p, q) \in C^\infty([0, 1])^2$.

Supposons que $(u, v) \in C^\infty([0, 1])^2$ vérifie $\ker B_{u,v} = \ker A_{p,q}$. Alors, avec les notations de 3.a), y_1 et y_2 sont éléments de $\ker B_{u,v}$, d'où, puisque W ne s'annule pas, $\boxed{u' - pu = 0}$. D'autre part, comme $A_{p,q}(y_1) = B_{u,v}(y_1) = 0$ et u ne s'annule pas, on a

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = y_1'' + \frac{u'}{u}y_1' + \frac{v}{u}y_1 = 0,$$

d'où $\left(q - \dfrac{v}{u}\right) y_1 = 0$. Par conséquent, d'après 1.b), la fonction $q - \dfrac{v}{u}$ est nulle en dehors d'un nombre fini de points de $[0, 1]$, donc sur $[0, 1]$ par continuité. Finalement, $\boxed{v = qu}$.

Réciproquement, si $u' - pu = 0$ et $v = qu$, alors, pour tout $y \in C^\infty([0, 1])$, on a

$$B_{u,v}(y) = uy'' + u'y' + vy = u(y'' + py' + qy),$$

donc $\ker A_{p,q} = \ker B_{u,v}$ puisque u ne s'annule pas.

En définitive, les couples (u, v) pour lesquels $\ker A_{p,q} = \ker B_{u,v}$ sont les couples

$$\boxed{\left(x \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^x p(t)dt\right), x \mapsto \lambda q(x) \exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)\right),\ \lambda \text{ décrivant } \mathbb{R}}.$$

4.a) Suivons l'indication du texte... D'une part, bien sûr,

$$\int_a^b (y_1 B_{u,v_2}(y_2) - y_2 B_{u,v_1}(y_1))dx = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1))dx &= \int_a^b (y_1(uy_2'' + u'y_2' + v_2y_2) - y_2(uy_1'' + u'y_1' + v_1y_1))\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \int_a^b (u(y_1y_2'' - y_2y_1'') + u'(y_1y_2' - y_2y_1'))\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \int_a^b (u(y_1y_2' - y_2y_1'))'\,dx \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \left[u(y_1y_2' - y_2y_1')\right]_a^b \\
&= \int_a^b (v_2 - v_1)y_1y_2\,dx + \left[uy_1y_2'\right]_a^b
\end{aligned}$$

puisque $y_2(a) = y_2(b) = 0$. Finalement,

$$\boxed{[uy_1y_2']_a^b = \int_a^b (v_1(x) - v_2(x))y_1(x)y_2(x)dx}.$$

4.b) Supposons un instant que y_1 ne s'annule pas dans $]a, b[$. Quitte à changer y_1 et y_2 en leurs opposés (ce qui est sans importance pour étudier leurs zéros), on peut supposer ces fonctions strictement positives dans $]a, b[$. Cela impose notamment $y_2'(a) > 0$, $y_2'(b) < 0$. Alors, la fonction $(v_1 - v_2)y_1y_2$ étant continue, positive et non identiquement nulle, on a

$$\int_a^b (v_1(x) - v_2(x))y_1(x)y_2(x)dx > 0$$

d'où, d'après 4.a),

$$\underbrace{u(b)y_2'(b)}_{<0}\underbrace{y_1(b)}_{\geq 0} - \underbrace{u(a)y_2'(a)}_{>0}\underbrace{y_1(a)}_{\geq 0} > 0,$$

ce qui est absurde. $\boxed{y_1 \text{ admet donc au moins un zéro dans }]a, b[}$.

Deuxième partie

5.a) L'ensemble des solutions de (D_λ) est un espace vectoriel de dimension 2 contenant strictement E_λ (puisque (D_λ) admet des solutions non nulles en 0), donc $\boxed{\dim E_\lambda \in \{0, 1\}}$.

5.b) Si $y_\lambda(1) = 0$, y_λ est un élément non nul de E_λ. Réciproquement, supposons que $E_\lambda \neq \{0\}$. D'après 5.a), E_λ est alors une droite vectorielle. D'autre part, si nous notons S_λ l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions de (D_λ), l'application

$$\delta_0 : S_\lambda \to \mathbb{R}, y \mapsto y(0)$$

est une forme linéaire non nulle. Son noyau est donc une droite vectorielle contenant E_λ. Pour des raisons de dimension, $E_\lambda = \ker \delta_0$. Or, $y_\lambda \in \ker \delta_0$, donc $y_\lambda \in E_\lambda$, autrement dit $y_\lambda(1) = 0$. On a donc montré que

$$\boxed{E_\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow y_\lambda(1) = 0}.$$

6.a) Supposons que λ soit une valeur propre. D'après 5.b), $y_\lambda \in E_\lambda$, et comme $y_\lambda'' = (r - \lambda)y_\lambda$, on a aussi

$$y_\lambda y_\lambda'' = (r - \lambda)y_\lambda^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (r(x) - \lambda)y_\lambda(x)^2 dx &= \int_0^1 y_\lambda(x)y_\lambda''(x)dx \\
&= [y_\lambda(x)y_\lambda'(x)]_0^1 - \int_0^1 y_\lambda'(x)^2 dx \\
&= -\int_0^1 y_\lambda'(x)^2 dx \text{ puisque } y_\lambda(0) = y_\lambda(1) = 0 \\
&< 0 \text{ puisque } y_\lambda'^2 \text{ est continue, positive et non identiquement nulle.}
\end{aligned}$$

La fonction $r-\lambda$ ne peut donc être positive. Par suite, il existe $x \in [0,1]$ tel que $r(x) < \lambda$; autrement dit, $\boxed{\inf_{x\in[0,1]} r(x) < \lambda}$, ce qui est un peu plus précis que ce que propose le texte.

6.b) Soit $y_1 \in E_{\lambda_1}$ et $y_2 \in E_{\lambda_2}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Parachutons[2] l'opérateur

$$\Phi : E_\lambda \to C^\infty([0,1]), y \mapsto y'' - ry.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi(y_1)(x)y_2(x)dx &= \int_0^1 y_1''(x)y_2(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \underbrace{[y_1'(x)y_2(x)]_0^1}_{=0 \text{ puisque } y_2\in E_\lambda} - \int_0^1 y_1'(x)y_2'(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \underbrace{-[y_1(x)y_2'(x)]_0^1}_{=0 \text{ puisque } y_1\in E_\lambda} + \int_0^1 y_1(x)y_2''(x)dx - \int_0^1 r(x)y_1(x)y_2(x) \\
&= \int_0^1 y_1(x)\Phi(y_2)(x)dx.
\end{aligned}$$

On est en présence d'une *sorte* d'opérateur autoadjoint - mais Φ n'est pas un endomorphisme ; on ne sera donc pas surpris que les « sous-espaces propres » de Φ soient deux à deux orthogonaux. Tenant compte du fait que $\Phi(y_1) = -\lambda_1 y_1$ et $\Phi(y_2) = -\lambda_2 y_2$, cela donne

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0$$

d'où, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\boxed{\int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0}.$$

Troisième partie

7.a) Immédiatement : $\boxed{y_\lambda(x) = \dfrac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \text{ pour tout } x \in [0,1]}$.

7.b) Les zéros de y_λ sont donc les $\dfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}, 0 \leq k \leq \left[\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]$. Par suite, $\boxed{N(\lambda) = 1 + \left[\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right]}$.

7.c) La fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{N}, \lambda \mapsto N(\lambda)$ est donc *constante au voisinage de tout* $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *qui n'est pas de la forme* $k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. En revanche, cette fonction est discontinue (à gauche) en les $k^2\pi^2$.

Remarque : les $k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont précisément les valeurs propres strictement positives de (D_λ).

[2]Pas tant que cela, en fait : on s'arrange pour que y_1 et y_2 soient des "vecteurs propres" de Φ.