# Centrale 1985, Math. I, Option M

## Notations.

On note $V$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues $f$ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, intégrables sur $]0,1]$. On note $W$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues $f$ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f^2$ soit intégrable sur $]0,1]$.

## Partie I : Un espace préhilbertien. . .

**1°)** Montrer que $W$ est un sous-espace vectoriel de $V$.
**2°)** Montrer que si l'on pose, pour $f$ et $g$ appartenant à $W$, $<f|g> = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, on définit un produit scalaire préhilbertien ; $W$ sera désormais muni de cette structure.
**3°)** Étudier l'appartenance à $V$ et l'appartenance à $W$ des restrictions à $]0,1]$ des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln x$$
$$f_2 : x \mapsto x^{-\alpha} \quad (\alpha > 0)$$
$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x(1-\ln x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

## Partie II : . . . et un opérateur autoadjoint.

**1°)** Soit $f$ un élément de $V$. On pose, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$F(x) = \ln x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t\,.$$

**a**) Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in ]0,1]$.
**b**) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$.
**c**) Établir la relation, valable pour tout $x \in ]0,1]$ :

$$xF''(x) + F'(x) = f(x)\,.$$

**2°)** Soit $f$ un élément de $V$ et $F$ définie comme ci-dessus.
**a**) Quelle est la valeur de $F(1)$ ?
**b**) Quelle est la limite de $xF'(x)$ lorsque $x$ tend vers 0?
**c**) Donner un exemple d'élément $f$ de $V$ tel que $F$ ne soit pas bornée ; on pourra utiliser une fonction du type $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^\alpha}$ avec $\alpha$ convenablement choisi.
**3°)** $f$ désigne toujours une fonction de $V$ et $F$ la fonction définie au début de cette partie.
**a**) Établir l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, pour tout $x \in ]0,1]$, l'on ait $|F'(x)| \leqslant \frac{A}{x}$.
**b**) Établir que $F \in W$.
**4°)** À tout élément $f$ de $V$ on associe ainsi $F$ qui appartient aussi à $V$, ce qui définit donc une application $T$ de $V$ dans $V$, manifestement linéaire.
$T$ est-elle injective ?
**5°)** On suppose ici que $f$ appartient à $W$ ; $T(f)$ a-t-elle une limite en 0? $T(f)$ est-elle bornée? On pourra établir : $\forall x \in ]0,1]$, $|F'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{<f|f>}{x}}$, avec toujours $F = T(f)$.
**6°) a**) Montrer que la restriction de $T$ à $W$ est un endomorphisme autoadjoint de $W$.
**b**) Montrer que la restriction de $-T$ à $W$ est un endomorphisme autoadjoint positif de $W$. Est-il défini positif ?

## Partie III : Éléments propres de $T$.

**1°)** Démontrer que les valeurs propres de $T$, s'il en existe, sont strictement négatives et que les vecteurs propres de $T$ appartiennent en fait à $W$.
**2°)** Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. Montrer que, si $f$ est vecteur propre de $T$ pour la valeur propre $-\lambda$, alors l'application de $]0, \frac{1}{\lambda}]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $f(\lambda x)$ est, dans son intervalle de définition, solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' + y = 0\,.$$

**3°)** Montrer que $(E)$ admet une solution $h$ développabvle en série entière et une seule, de la forme $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $a_0 = 1$, et de rayon de convergence $R > 0$. On donnera l'expression de $a_n$ et la valeur de $R$.
**4°) a**) Établir qu'il existe $r_1$ réel tel que $h(r_1) = 0$ et que, pour tout $x < r_1$, $h(x) > 0$. On pourra commencer par étudier le signe de $h'(x)$ sur $[0,2]$.
**b**) Justifier de façon rigoureuse l'encadrement $1,4 < r_1 < 1,5$.
**5°) a**) Soient $b$ et $c$ deux réels tels que $0 < b < c \leqslant r_1$. Soit $y$ une application de $]0,c[$ dans $\mathbb{R}$, solution de $(E)$ ; établir à l'aide de la fonction $z = \frac{y}{h}$ l'existence de deux constantes $A$ et $B$ telles que

$$\forall x \in ]0,c[, \quad y(x) = Ah(x) + Bh(x)\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{th(t)^2}\,.$$

**b**) Étudier la limite de $y(x)$ quand $x$ tend vers 0.
**6°)** Déduire de ce qui précède que, si $f$ est vecteur propre de $T$ pour la valeur propre $-\lambda$, alors il existe $\mu$ réel tel que
$$\forall x \in ]0,1], \quad f(x) = \mu h\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

**7°)** Soit inversement un nombre réel $\lambda > 0$ ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $h\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ soit vecteur propre de $T$. Quel lien existe-t-il entre les zéros de $h$ et les valeurs propres de $T$ ?

**8°)** Établir qu'à chaque valeur propre de $T$ correspond un sous-espace propre de dimension 1 et que ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour la structure préhilbertienne de $W$.

## Partie IV : La fonction de Bessel et ses zéros.

**1°)** Soit $y$ une solution de $E$ dans un intervalle $I$ inclus dans $]0,+\infty[$. Mettre sous une forme aussi simple que possible les dérivées premières des fonctions qui à $x$ associent respectivement $xy'(x)^2 + y(x)^2$ et $x^2y'(x)^2 + xy(x)^2$.
**2°) a**) Montrer que, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $xh'(x)^2 + h(x)^2$ tend vers une limite $L \geqslant 0$.
**b**) En déduire que $h$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$ et que $h'$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
**3°) a**) Établir l'existence des quatre intégrales suivantes, où $a$ désigne un réel strictement positif quelconque (a priori comme intégrales impropres) :
$$\int_a^\infty h'(x)^2\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^\infty h(x)h''(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^\infty \frac{h(x)h'(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^\infty \frac{h(x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

**b**) En déduire que $L = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
**c**) Montrer que les fonctions $h'^2$, $hh''$, $x \mapsto \dfrac{h(x)h'(x)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{h(x)^2}{x}$ sont intégrables sur $[a,+\infty[$.
**4°)** On suppose, dans cette seule question, qu'il existe $r > 0$ tel que $h(r) = 0$ et que, pour tout $x \geqslant r$, l'on a $h(r) \geqslant 0$.
**a**) Que dire du sens de variation de $xh'(x)$ pour $x \geqslant r$ ?
**b**) On suppose que l'on connait une valeur $c > r$ telle que $h'(c) < 0$ ; trouver une fonction majorant $h$ sur $[c,+\infty[$ et en tirer une contradiction.
**c**) En déduire que $h$ est croissante sur $[r,+\infty[$. Est-ce possible ?
**5°)** Montrer que $h$ admet une infinité de zéros.
**6°)** Soit $r$ un zéro de $h$.
**a**) Démontrer l'existence d'au moins un zéro de $h'$ sur $]r,+\infty[$.
**b**) Soit $q$ un tel zéro de $h'$. Établir que
$$\forall x > r, \quad |h'(x)| \leqslant |h'(r)|.$$

En déduire une majoration de $\left|\int_r^q h(x)\,\mathrm{d}x\right|$.
**c**) À l'aide de l'intégrale précédente, établir l'inégalité
$$q \geqslant r + \sqrt{2r}.$$

**7°) a**) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, l'intervalle $[n, n+1[$ contient au plus un zéro de $h$.
**b**) Établir que l'on peut ranger les zéros de $h$ en une suite strictement croissante $(r_n)$, de limite infinie, et telle que
$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1} - r_n = +\infty.$$

**c**) Trouver une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ on ait $r_n \geqslant Kn^2$.
**8°)** Donner l'allure de la courbe représentative de $h$. On établira que, dans chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$, $h'$ s'annule une fois et une seule et que la suite qui à $n$ associe $M_n = \mathrm{Max}\{|h(x)| \;/\; x \in [r_n, r_{n+1}]\}$ est décroissante et tend vers 0.