Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2006

Partie I : Un espace préhilbertien...

1°) On a déjà $W \subset V$ du fait que, sur un intervalle borné, les fonctions de carré intégrable sont intégrables en raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\int_\alpha^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \int_\alpha^1 \mathrm{d}t \int_\alpha^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Et l'ensemble des fonctions de carrés intégrables forme bien un espace vectoriel : si f et g sont de carrés intégrables, fg est intégrable (encore Cauchy-Schwarz), donc $(f+g)^2 = f^2+g^2+2fg$ l'est aussi.

2°) On vient de signaler que si f et g sotn de carrés intégrables alors fg est intégrable. La bilinéarité est évidente et si $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ on a bien $f=0$ par continuité de celle-ci.

3°) Les trois fonctions proposées se rattachent aux intégrales de Bertrand, de la forme $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha|\ln x|^\beta}$ avec $0<b<1$. On sait que la fonction sous-jacente est intégrable si, et seulement si $\alpha>1$ ou bien $\alpha=1$ et $\beta>1$ (résultat qui s'obtient en général par comparaison à une intégrale de Riemann de fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ avec $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, et en particulier, pour $\alpha=1$, au moyen d'un changement de variable. C'est ainsi que $f_1 = \ln$ est dans W (cas $\alpha=0, \beta=-2$, que $f_2(x) = x =^{-\alpha}$ est dans V pour $\alpha<1$ et dans W pour $\alpha<\frac{1}{2}$. Enfin, pour $f_3(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^\alpha}$ on a au voisinage de 0 un équivalent $\frac{1}{x(|\ln x|)^\alpha}$, donc un élément de V si $\alpha>1$, et jamais un élément de W.

Partie II : ... et un opérateur autoadjoint.

1°) a) L'existence de $F(x) = \ln x \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ est assurée dès que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, ce qui est vrai puisque f est dnas V.

b) Sur $]0,1]$, les deux intégrales qui apparaissent dans F sotn fonctions de leurs bornes, donc de classe $\mathcal{C}^1$ puisque l'on y intègre des fonctions continues. Dérivons donc : $F'(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\ln x - f(x)\ln x$ soit encore $\boxed{F'(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.}$

À ce moment il apparaît clairement que F' est encore de classe $\mathcal{C}^1$, donc que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$.

c) La relation précédente donne aussi $xF'(x) = \displaystyle\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Dérivons : il vient $\boxed{xF''(x)+F'(x) = f(x)\,.}$

2°) a) On a immédiatement $F(1)=0$.

b) $xF'(x)$ est une intégrale fonction de sa borne supérieure, donc continue (ce qui reste vrai même pour une intégrale généralisée). Donc $\lim\limits_{x\to 0} xF'(x) = 0$.

c) Prenons la fonction f_3 avec $\alpha=2$ (elle est bien dans V). On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \ln x \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1-\ln t)^2} + \int_x^1 \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t(1-\ln t)^2}\\
&= \ln x \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} + \int_{\ln x}^0 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1-u)^2}\\
&= \frac{\ln x}{1-\ln x} - \ln|\ln x - 1| + 1 - \frac{1}{1-\ln x} = -\ln|\ln x - 1|
\end{aligned}$$

expression non bornée quand x s'approche de 0. Ainsi, F n'est pas bornée.

3°) a) f étant intégrable, son intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ reste bornée, donc $xF'(x)$ l'est.

b) La majoration précédente permet d'estimer F :

$$\begin{aligned}
|F(x)| = |F(x)-F(1)| &= \Big|\int_x^1 F'(t)\,\mathrm{d}t\Big|\\
&\leqslant \int_x^1 |F'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{A}{t}\,\mathrm{d}t = A|\ln x|
\end{aligned}$$

ce qui amène $|F(x)|^2 \leqslant A\ln^2 x$, et l'intégrabilité de F^2 par domination par une fonction intégrale. Ainsi, on a en fait $\boxed{F \in W \subset V.}$

4°) a) On a $T \subset \mathcal{L}(V,W) \subset \mathcal{L}(V,V) = \mathcal{L}(V)$. Si $F = T(f)$ est nulle, F' et F'' le sont, donc f est nulle d'après l'équation différentielle : $\boxed{T \text{ est injective.}}$

Remarque : Il n'est pas paradoxal d'avoir un endomorphisme injectif de V vers le sous-espace W, car la dimension de ces espaces est infinie.

b) Soit $F = T(f)$. Nous savons déjà que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $F(1) = \lim\limits_{x\to 0} xT'(x) = 0$. Réciproquement, si g est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$ telle que $g(1) = \lim\limits_{x\to 0} xg'(x) = 0$, posons $f(x) = xg''(x)+g'(x)$: c'est a priori une fonction continue sur $]0,1]$. La comparaison $g'(x) \in o\big(\frac{1}{x}\big)$ au voisinage de 0 permet un passage à la primitive parce que la fonction de comparaison est positive et non intégrable (théorème de primitivation des relations de comparaison) ; il en résulte que

$]0,1]$, on peut considérer $F=T(f)$, on a
$$yF'(y)=\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y tg''(t)+g'(t)\,\mathrm{d}t=yg'(y)-\lim_{t\to 0} tg'(t)=yg'(y)$$
soit $F'=g'$, donc $F-g$ est constante et en fait nulle à cause de la valeur en 1. En fin de compte, on a bien $g=T(f)$.
Remarque : On ne doit pas s'étonner de la non-évocation de W : le raisonnement ci-dessus montre qu'en fait g^2 est négligeable devant $\ln^2$, donc intégrable.
5°) Si f est dans W on a aussi, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|xF'(x)|^2=\Big|\int_0^x f(t).1\,\mathrm{d}t\Big|^2\leqslant\int_0^x|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\int_0^x\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^1|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$
soit $|F'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\|f\|_2$. F' est donc intégrable ; on l'intègre :
$$\Big|\int_x^1 F'(t)\,\mathrm{d}t\Big|=|F(x)|\leqslant\|f\|_2\int_x^1\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=2\|f\|_2(1-\sqrt{x})$$
donc $F=T(f)$ est bornée. De plus, on a $\big|\ln x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\big|\leqslant\|f\|_2\sqrt{x}|\ln x|$ (de limite nulle en 0) et $f\in W$, $\ln\in W$ amène $f\ln\in V$ donc $\int_x^1\ln t f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand x tend vers 0. Finalement, $F=T(f)$ a une limite en 0.
6°) a) On intègre par parties :
$$\int_\varepsilon^1 Tf(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\Big[Tf(x)\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big]_\varepsilon^1 -\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\Big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$
Comme Tf est de limites nulles en 0 et 1, le terme tout intégré tend vers 0 avec ε. D'autre part, Tf et g sont dans W, donc leur produit est intégrable. On peut donc écrire, au moins au sens des intégrales impropres :
$$<Tf|g>=-\int_{\to 0}^1\frac{1}{x}\Big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$
Cette dernière intégrale faisant intervenir f et g de manière symétrique, on peut échanger les rôles et parvenir au résultat attendu, soit $\boxed{<Tf|g>=<f|Tg>.}$

b) Quand on prend $f=g$, il vient
$$<Tf|f>=-\int_{\to 0}^1\frac{1}{x}\Big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$
donc la restriction de $-T$ à W est un endomorphisme autoadjoint positif. Et l'égalité $<Tf|f>=0$ amène (par continuité) celle de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x\in]0,1]$; en dérivant on obtient $f=0$. En somme,

$$\boxed{T\text{ est, sur }W\text{, un endomorphisme autoadjoint défini négatif.}}$$

Partie III : Éléments propres de T.

1°) Pour commencer, T est injectif (II4°a) ; les valeurs propres sont donc strictement négatives : si $Tf=-\lambda f$ alors $<Tf|f>=-\lambda\|f\|^2<0$. De plus, la relation $f=\frac{-1}{\lambda}Tf$ montre que f est, comme Tf, dans W.
Remarque : On ne sait pas encore que T admet la moindre valeur propre !
2°) On a toujours $F=Tf=-\lambda f$. En dérivant deux fois il vient : $xF''(x)+F'(x)=f(x)$ soit $A(x)=\lambda xf''(x)+\lambda f'(x)+f(x)=0$. Notons $y(x)=f(\lambda x)$. On a alors : $xy''(x)+y'(x)+y(x)=\lambda^2xf''(\lambda x)+\lambda f'(\lambda x)+f(\lambda x)=A(\lambda x)=0$. Ainsi, y vérifie l'équation différentielle
$$(E)\qquad xy''+y'+y=0\,.$$
3°) Solutions développables de (E)..
Soit $h(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, de rayon de convergence $R>0$, et solution de (E) sur $]-R,R[$. On peut, dans cet intervalle, dériver terme à terme, ce qui donne :
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}+a_n)x^n=0$$
La théorie de l'unicité des sommes séries entières nosu assure alors que l'on doit avoir
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad (n+1)^2a_{n+1}+a_n=0$$
soit encore, compte tenu de la valeur de a_0 et par une récurrence évidente : $\boxed{a_n=\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}.}$

À l'occasion, nous constatons que le rayon de convergence d'une telle série est infini (le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tendant vers 0).

Réciproquement, nous pouvons <u>définir</u> $\boxed{h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{(n!)^2}.}$

En reportant dans (E), nous trouvons effectivement une solution définie (et développable) sur $\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{(n+1)^2} \leqslant \frac{|x|}{4}$$

pour $n \geqslant 1$; en d'autres termes, la série qui définit $h(x)$ est « alternée » pour $x \in [-4,4]$ excepté pour son premier terme. Le théorème spécifique à ces séries nous donne alors l'encadrement, valable sur $[0,4]$: $1-x \leqslant h(x) \leqslant 1-x+\frac{x^2}{4}$, donc $h(2) \leqslant 0$. Comme $h(0)=1$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que h doit changer de signe sur $[0,2]$, par continuité, $r_1 = \mathrm{Min}\{x \in [0,2] \ / \ h(x)=0\}$ existe et est le nombre cherché.

Remarque : En étudiant la série de h' on montrerait de même que h décroît strictement sur $[0,2]$.

b) On pousse un peu plus loin :

$$u(x) = 1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{36} \leqslant h(x) \leqslant 1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{36}+\frac{x^4}{24^2} = v(x)\,.$$

On calcule – de manière exacte – u et v aux points $1,4$ et $1,5$, pour se convaincre du fait que $1,4 < r_1 < 1,5$. Ce n'est pas si difficile : $u(1,4) = \frac{31}{5^3.18} > 0$ et $v(1,5) = \frac{-23}{2^{10}} < 0$.

5°) a) Sur $]0,r_1[$ la fonction h ne s'annule pas, on peut donc, pour toute solution y de (E), poser $z = \frac{y}{h}$ (c'est la méthode dite de variation de la constante) ; soit aussi $y = hz$. On reporte dans (E) avec $x \in]0,c]$ et $c < r_1$:

$$\begin{aligned} xy''(x)+y'(x)+y(x) &= z(h''(x)+h'(x)+h(x)) \\ &\quad + xz''h(x)+2xz'(x)h'(x)+z'(x)h(x) = 0 \\ \iff (xh(x)^2z'(x))' &= xz''h(x)+(2xh'(x)+h(x))z'(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui revient à avoir $z' = \frac{B}{xh(x)^2}$, B étant une constante (sur $[0,c[$). Nous pouvons donc intégrer afin d'avoir z, puis y en multipliant par h. Pour intégrer pratiquement, on écrit l'intégrale fonction de sa borne supérieure avec une borne inférieure dans $]0,c[$: c'est b. Il vient enfin :

$$\forall x \in]0,c[, \quad y(x) = Ah(x) + Bh(x)\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{th(t)^2}\,.$$

b) Lorsque x tend vers 0, $h(x)$ tend vers 1 et $\frac{1}{th(t)^2}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$, non intégrable. L'intégrale tend donc vers l'infini, et $y(x)$ également à moins que l'on ait $B=0$.

6°) Soit alors $Tf = -\lambda f$. On a vu en III1° que f est nécessairement dans W, en III2° que $y(x) = f(\lambda x)$ doit vérifier (E) sur $]0,\frac{1}{\lambda}[$, et en II5° que $-\lambda f = Tf$ est prolongeable par continuité en 0. Nous venons juste de montrer que l'espace des solutions de (E) sur $]0,c[$ qui sont prolongeables par continuité en 0 est de dimension 1, engendré par h. Finalement, f doit être proportionnelle à $h(\frac{x}{\lambda})$, non seulement sur l'intervalle $]0,\mathrm{Min}(\lambda c,1)[$ mais aussi sur tout le domaine de définition de f. En somme, on doit avoir

$$\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \mu h\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)\,.$$

7°) Soit inversement $\lambda > 0$ et $f(x) = h(\frac{x}{\lambda})$: c'est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ (donc dans W). Si f est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\lambda$ alors $Tf = -\lambda f$ et on doit avoir $f(1) = 0 = h(\frac{1}{\lambda})$. Cette condition oblige à choisir pour valeur propre l'opposé de l'inverse d'un zéro de h. Réciproquement, avec un tel choix de λ on a bien $\lim\limits_{x\to 0} xf'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\lambda}h'(\frac{x}{\lambda}) = 0 \times h'(0) = 0$. Les calculs menés au III2°, mais lus en sens inverse, montrent que l'on a bien $Tf = -\lambda f$, donc que f est bien un vecteur propre de T.

8°) Les deux questions précédentes établissent clairement l'existence des valeurs propres, en lien avec les zéros de h (qui existent, il y a au moins r_1), et le fait que les espaces propres sotn de dimension 1. L'othogonalité des différents espaces propres s'établit comme pour le théorème spectral : si $Tf = -\lambda f$ et $Tg = -\mu g$ avec $\lambda \neq \mu$ alors $<Tf|g> = -\lambda <f|g> = <f|Tg> = -\mu <f|g>$, ce qui entraîne $f \perp g$.

Remarque : On ne peut pas, pour autant, prétendre que T est diagonalisable, car rien n'indique que les espaces propres de T, associés aux zéros de h, aient pour somme E ; la dimension étant infinie, le théorème spectral n'est pas applicable. En réalité, on peut envisager de décomposer les éléments de E comme des séries de vecteurs propres de h, mais c'est une toute autre histoire...

Partie IV : La fonction de Bessel et ses zéros.

1°) On suppose que l'on a $xy''(x)+y'(x)+y(x) = 0$ sur $I \subset \mathbb{R}_+$. Dès lors, $D(xy'^2+y^2) = 2xy'y''+y'^2+2yy' = y'(2xy''+y'+2y) = -y'^2 \leqslant 0$ et $D(x^2y'^2+xy^2) = 2xy'+2x^2y'y''+y^2+2xyy' = y^2 \geqslant 0$. En conséquence, $\varphi(x) = xy'^2+y^2$ décroît et $x^2y'^2+xy^2$ croît.

2°) a) Comme φ reste positive, cette fonction possède une limite à l'infini (ou en la borne supérieure de I). C'est, notamment, le cas pour $y = h$, ce qui amène : $h(0)^2 = 1 \geqslant \varphi(x) \geqslant \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = L$ (existe).

b) Ainsi, h^2 est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et h l'est également. De même, xh'^2 est bornée, ce qui s'écrit $|h'(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{x}}$, et h' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\int_a^b h'(x)^2\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)-\varphi(b) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(a)-L$$

donc h'^2 est intégrable. Ensuite on peut intégrer par parties :

$$\int_a^X h(x)h''(x)\,\mathrm{d}x = h(X)h'(X) - h(a)h'(a) - \int_a^X h'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

ce qui admet une limite quand X tend vers $+\infty$ (h étant bornée et h' de limite nulle), fournissant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} h(x)h''(x)\,\mathrm{d}x$. On a, toujours par parties :

$$\int_a^X \frac{h(x)h'(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{h(X)^2}{X} - \frac{h(a)^2}{a} - \int_a^X \frac{h(x)(xh'(x)-h(x))}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

ce qui peut se réécrire en

$$2\int_a^X \frac{h(x)h'(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{h(X)^2}{X} - \frac{h(a)^2}{a} + \int_a^X \frac{h(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

ce qui a encore une limite (h^2 est bornée et $\frac{1}{x^2}$ est intégrable). Enfin, en ajoutant les deux précédentes on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{h(x)h'(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_a^X h(x)h''(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^X \frac{h(x)(xh''(x)+h'(x))}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^X \frac{h(x)^2}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ce qui nous donne la convergence de $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} \frac{h(x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) Revenons à φ : en ajoutant deux autres des intégrales précédentes on a la convergence de $\displaystyle\int_a^X \frac{h(x)^2+xh'(x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$; la fonction intégrée est équivalente à $\frac{L}{x}$ (si $L\neq 0$), ce qui est incompatible avec la convergence de l'intégrale. Par conséquent, on a $L=0$ soit aussi $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} xh'(x)^2 = 0.}$

c) Dans le cas de fonctions positives, on sait que l'intégrabilité est équivalente à la convergence de l'intégrale fonction de sa borne supérieure ; c'est ainsi que nous trouvons l'intégrabilité de h'^2 et de $x\mapsto \frac{h(x)^2}{x}$. Nous avons aussi au voisinage de l'infini $h(x)\in o(1)$ et $h'(x)\in o\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)$, d'où $\frac{h(x)h'(x)}{x} \in o\big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\big)$, ce qui assure l'intégrabilité de $x\mapsto \frac{h(x)h'(x)}{x}$. Enfin, $h(x)h''(x) = \frac{-h(x)^2-h(x)h'(x)}{x}$ est intégrable comme somme de fonctions intégrables (celle-ci est même intégrable sur $\mathbb{R}_+$).

4°) Le dernier zéro de h..

Soit $h(r)=0$ et $h(r)\geqslant 0$ pour $x\geqslant r$.

a) On se souvient que $D(xh'(x)) = -h(x)$ ce qui est négatif sur $[r,+\infty[$; donc $xh'(x)$ décroît.

b) Si $h'(c)<0$ pour un certain $c>r$, on a $yh'(y)\leqslant ch'(c)<0$, soit $h'(y)\leqslant \frac{ch'(c)}{y}<0$; cette inégalité peut se reformuler comme $\frac{1}{y}\in\mathcal{O}(h'(y))$ en $+\infty$. Le théorème de primitivation des relations de comparaison (applicable puisqu'ici h' est négative) donne $\ln y\in\mathcal{O}(h(y))$, en contradiction avec le fait que h a une limite nulle à l'infini.

c) L'inexistence de c montre que h' est positive sur $[r,+\infty[$. La croissance de h est incompatible avec la limite nulle à l'infini. En fin de compte, tout ce qu'on a tiré de l'hypothèse initiale est impossible, donc h ne peut rester positive à partir de r. En inversant le sens des inégalités, on montre que h ne rester de signe constant sur $[r,+\infty[$.

5°) Si h ne s'annulait qu'un nombre fini de fois, elle serait de signe constant au-delà de son plus grand zéro, ce qui n'est pas. Ainsi, h admet une infinité de zéros.

6°) a) Si r est un zéro de h, il existe un autre zéro $r'>r$; le théorème de Rolle entraîne l'existence d'au moins un zéro q de h' sur $]r,r'[$.

b) On intègre la dérivée de $xh'(x)$ sur $[r,q]$:

$$(1)\qquad \int_r^q h(x)\,\mathrm{d}x = rh'(r) - qh'(q) = rh'(r)\,.$$

D'autre part, xh'^2+h^2 décroît sur $[r,+\infty[$ et donc $rh'(x)^2\leqslant xh'(x)^2\leqslant rh'(r)^2$ soit aussi $h'(x)^2\leqslant h'(r)^2$, ce qui donne bien $\forall x>r,\ |h'(x)|\leqslant |h'(r)|$.

Puis, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\left|\int_r^q h(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\big[(x-q)h(x)\big]_r^q - \int_r^q (x-q)h'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ (2)\qquad &\leqslant \int_r^q (x-q)|h'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |h'(r)|\frac{(q-r)^2}{2}\end{aligned}$$

c) En combinant (1) et (2) il vient $r\leqslant \frac{(q-r)^2}{2}$ à moins que $h'(r)=0$, ce qui ne peut être (si h et h' s'annulent en r, h est une solution du problème de Cauchy pour (E) en r et la fonction nulle en est une autre, ce qui force h à être nulle (théorème de Cauchy), ce qui est exclu). Il en résulte : $\boxed{(3)\qquad q\geqslant r+\sqrt{2r}\,.}$

à la fois r et q dans $[n,n+1[$, ce qui avec (3) amène

$$n+1 \geqslant r+\sqrt{2r} \geqslant n+\sqrt{2n} > n+1$$

ce qui est impossible.

Remarque : Sur $[0,1[$ *h ne s'annule pas du tout (série alternée).*

b) Nous sommes, dès lors, certains de pouvoir ranger les zéros de h en une suite strictement croissante de limite infinie (si r_n a été exhibé, il n'existe aucun autre zéro de h dans $E(r_n), E(r_n)+1[$ et on aura $r_{n+1} = \mathrm{Inf}\{r > r_n \ / \ h(r) = 0\}$). De plus, on a $r_{n+1} \geqslant r_n + \sqrt{2r_n}$ qui tend vers l'infini.

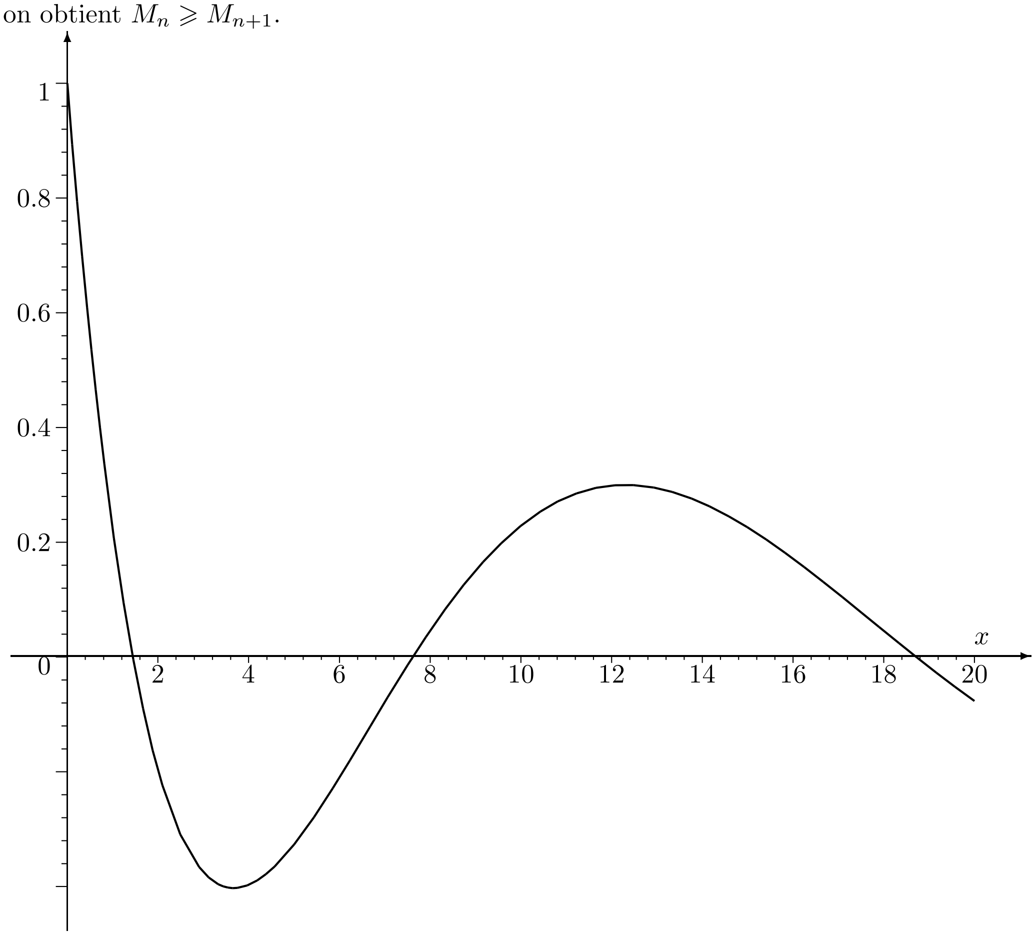
c) Cherchons K telle que $r_n \geqslant Kn^2$. On a vu au III4°b que $r_1 > 1,4$; toute valeur de K inférieure à 1 fera l'affaire pour débuter. Supposons que l'on ait obtenu $r_n \geqslant Kn^2$; alors $r_{n+1} \geqslant r_n + \sqrt{2r_n} \geqslant Kn^2 + n\sqrt{2K} \geqslant K(n+1)^2 = Kn^2 + 2Kn + K$ se réalise dès que $n \geqslant \dfrac{K}{\sqrt{2K}-2K}K$. Prenons, par exemple, $K = \frac{2}{9}$; alors $\dfrac{K}{\sqrt{2K}-2K} = \dfrac{2}{9(\frac{2}{3}-\frac{4}{9})} = 1$ convient. Par conséquent, les zéros de h s'écartent de plus en plus.

Remarque : L'estimation asymptotique trouvée suggère fortement d'introduire $J(x) = h\left(\frac{x^2}{4}\right)$, c'est la « vraie » fonction de Bessel, dont les zéros sont plus régulièrement répartis.

8°) Soit s_n le point de l'intervalle $[r_n, r_{n+1}]$ où $|h|$ atteint son maximum. On a $h'(s_n) = 0$ et $M_n = |h(s_n)|$. Il est certain que la suite (M_n) tend vers 0, car la limite de h elle-même est nulle. Cependant, $xh'(x)^2 + h(x)^2$ décroît sur $[s_n, +\infty[$:

$$M_n^2 = h(s_n)^2 \geqslant xh'(x)^2 + h(x)^2 \geqslant h(x)^2$$

et, en particulier, on obtient $M_n \geqslant M_{n+1}$.



Section A : Définitions

1°) « Utilisation Commerciale » signifie la distribution ou tout autre moyen de mise à disposition d'un tiers de la documentation.
2°) « Contributeur » signifie une personne ou une entité qui crée ou contribue à la création de modifications.
3°) « Documentation » signifie la documentation originale ou les modifications ou des combinaisons de la documentation originale et les modifications, dans chaque cas, incluant des parties de celles-ci.
4°) « Mécanisme de distribution électronique » signifie un mécanisme communément accepté pour le transfert électronique de données.
5°) « Auteur initial » signifie l'individu ou l'entité qui a été identifié(e) comme étant l'Auteur initial dans la notice obligatoire requise par l'Annexe.
6°) « Œuvre plus importante » signifie une œuvre qui combine de la documentation ou des parties de celle-ci avec de la documentation ou d'autres écrits qui ne sont pas couverts par les conditions de cette licence.
7°) « Licence » signifie ce document.
8°) « Modifications » signifie toute addition, ou suppression, de substance ou de structure d'une documentation originale ou autres modifications précédentes, telles que traduction, abstraction, résumé, ou toute autre forme dans laquelle la documentation originale ou modifications précédentes peut être resaisie, transformée ou adaptée. Une œuvre consistant en des révisions éditoriales, annotations, élaborations, et autres modifications qui, en tant qu'œuvre entière représente une œuvre de l'esprit original, est considérée comme étant une modification. Par exemple, lorsque la documentation est distribuée sous forme d'une série de documents, une modification est comprise comme étant :
A. Toute addition à, ou suppression de, contenu de la documentation originale ou des modifications précédentes.
B. Toute nouvelle documentation qui comporte toute partie de la documentation originale ou modifications précédentes.
9°) « Documentation originale » signifie de la documentation décrite comme étant la documentation originale dans la notice obligatoire requise par l'Annexe, et qui, au moment de sa distribution selon les conditions de cette licence ne constitue pas encore de la documentation couverte par cette licence.
10°) « Forme éditable » signifie la forme préférée de la documentation pour y effectuer des modifications. La documentation peut être sous forme électronique, compressée, ou sous forme d'archive, à condition que le logiciel de décompression ou de désarchivage soit largement disponible de manière gratuite.
11°) « Vous » (ou « Votre ») signifie un individu ou une entité juridique qui exerce des droits conformément à, et en respectant, toutes les conditions de cette Licence ou une version future de cette licence telle que publiée selon la Section D1 (« Versions de la Licence »). Pour des entités juridiques, « vous » couvre également toute entité qui contrôle, ou est contrôlée par, ou qui est sous contrôle commun avec vous. Pour les besoins de la présente définition, « contrôle » signifie
(a) le pouvoir, direct ou indirect, de diriger ou gérer une telle entité, que ce soit de manière contractuelle ou par tout autre moyen, ou
(b) la propriété de plus de cinquante pour cent (50%) des actions libérées ou de la propriété réelle d'une telle entité.

Section B : CONCESSIONS DE LICENCES

1°) Concession de Licence de l'Auteur Initial.
L'Auteur Initial vous concède, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans la Section B1 (« Concession de Licence de l'Auteur Initial ») deviennent effectifs à la première date de distribution, par l'Auteur Initial de la documentation originale selon les conditions de cette Licence.
2°) Concession de Licence du Contributeur.
Chaque Contributeur vous concéde, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans cette Section B2 (« Concession de Licence du Contributeur ») deviennent effectifs à la première date que le Contributeur fait, pour la première fois, une Utilisation Commerciale la documentation.

Section C : OBLIGATIONS DE DISTRIBUTION

1°) Application de la licence.
Les modifications que vous créez ou auxquelles vous contribuez sont couvertes par cette licence, y compris sans limitation la Section B2 (« Concession de licence du Contributeur »). La documentation peut être distribuée seulement selon les conditions de cette licence ou toute version future publiée selon la Section D1 (« Versions de la licence »), et Vous devez intégrer une copie de cette licence dans chaque copie de la documentation que Vous distribuez. Vous ne pouvez offrir ou imposer des conditions qui modifient ou restreignent la version applicable de cette licence ou des droits concédés selon celle-ci. Toutefois, vous pouvez inclure un document additionnel qui offre les droits additionnels décrits à la Section C5 (« Notices nécessaires »).
2°) Disponibilité de la documentation.
Toute modification que Vous créez ou à laquelle Vous contribuez doit être disponible publiquement dans une Forme Éditable selon les conditions de cette Licence à travers un support tangible ou un Mécanisme de Distribution Électronique accepté.
3°) Description des modifications.
Toute documentation à laquelle vous contribuez doit identifier les modifications que vous avez effectuées dans la création du Document, ainsi que la date de telles modifications. Vous devez inclure une déclaration facilement visible indiquant que la modification est dérivée, directement ou indirectement de la documentation originale fournie par l'Auteur Initial et inclure le nom de l'Auteur Initial dans la documentation ou via un lien électronique qui décrit l'origine ou la propriété de la documentation. La documentation modifiée peut être créée par un programme électronique qui suit automatiquement les changements dans la documentation, et de tels changements doivent pouvoir être disponibles pour le public pendant au moins 5 ans après la première distribution de la documentation .
4°) Propriété Intellectuelle.
Le Contributeur garantit que celui-ci croit que ses modifications sont des créations originales du Contributeur, et/ou que le Contributeur détient des droits suffisants lui permettant de concéder les droits indiqués dans cette Licence.
5°) Notices nécessaires.
Vous devez reproduire la notice figurant dans l'Annexe dans chaque fichier de documentation. S'il n'est pas possible d'inclure une telle notice dans un fichier de documentation particulier, du fait de la structure du fichier, vous devez alors inclure une telle notice dans un endroit (tel qu'un répertoire) où un lecteur serait capable de chercher une telle notice, par exemple, via un hyperlien dans chaque fichier de la documentation qui renverra le lecteur vers une page qui décrit l'origine et la propriété de l'œuvre. Si vous avez créé une ou plusieurs modification(s) vous pouvez ajouter votre propre nom, en tant que Contributeur, à la notice décrite en Annexe.
Vous devez également reproduire cette licence dans tout fichier de documentation (ou mettre un hyperlien dans chaque fichier de la documentation) à l'endroit où vous expliquez les droits d'utilisateur ou de propriété.
Vous pouvez offrir à la vente, et faire payer, des services de garantie, soutien, indemnité ou responsabilité civile vis-à-vis d'un ou de plusieurs récipiendaires de la documentation. Toutefois, vous ne pouvez faire ceci que sous votre propre responsabilité, et non pas sous la responsabilité de l'Auteur Initial ni un quelconque Contributeur. Vous devez faire clairement apparaitre que toute garantie, soutien, indemnité ou responsabilité que vous offrez, est faite uniquement par vos soins, et vous marquez par la présente votre accord de dédommager l'Auteur Initial ainsi que chaque Contributeur par rapport à toute demande en garantie envers laquelle l'Auteur Initial ou tout Contributeur pourrait être appelé du fait des services de garantie, soutien, indemnité ou de responsabilité civile que vous offrez.

Vous pouvez créer une œuvre plus importante en combinant la documentation avec d'autres documents non couverts par la présente Licence et ainsi distribuer l'œuvre plus importante sous la forme d'un seul produit. Dans ce cas, vous devez vous assurer que les conditions de cette licence soient respectées pour la documentation.

Section D : Champ d'application de la licence

Cette Licence s'applique à la documentation à laquelle l'Auteur Initial a joint cette Licence et la notice qui apparait en Annexe.

Section E : VERSIONS DE LA LICENCE

1°) Nouvelles Versions.
L'Auteur Initial peut publier des versions révisées et/ou nouvelles de la Licence de temps à autre.
2°) Effets des nouvelles versions.
Si la documentation a été publiée selon les conditions d'une version particulière de la licence, vous pouvez continuer à l'utiliser selon les conditions de cette version. Vous pouvez également décider d'utiliser une telle documentation selon les conditions de toute version ultérieure de la licence publiée par Robert Cabane. Personne d'autre que Robert Cabane n'a le droit de modifier les conditions de cette licence. Le fait de fournir le nom de l'auteur initial, la documentation originale ou le contributeur dans la notice décrite dans l'Annexe ne sera pas considéré comme une modification de cette Licence.

Section F : DÉCHARGE DE GARANTIE

LA DOCUMENTATION EST FOURNIE SELON LES CONDITIONS DE CETTE LICENCE « TEL QUEL », SANS GARANTIE AUCUNE, QU'ELLE SOIT EXPRESSE OU IMPLICITE, Y COMPRIS, SANS LIMITATION AUCUNE, SANS GARANTIE QUE LA DOCUMENTATION NE COMPORTE AUCUN DÉFAUT, NE SOIT COMMERCIALISABLE, NE CONVIENNE A UNE UTILISATION QUELCONQUE, NI NE SOIT CONSIDÉRÉE COMME UNE CONTREFRAÇON. LA TOTALITÉ DES RISQUES RELATIFS A LA QUALITÉ, PRECISION, ET EXECUTION DE LA DOCUMENTATION DEMEURE CHEZ VOUS. SI LA DOCUMENTATION S'AVÉRERAIT ÊTRE DÉFECTUEUSE PAR QUELQUE BIAIS QUE CE SOIT, VOUS (ET NON PAS L'AUTEUR INITIAL OU TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR) DEVEZ ASSUMER LES FRAIS DE TOUTE MAINTENANCE, REPARATION OU CORRECTION. CETTE DÉCHARGE DE GARANTIE CONSTITUE UNE PARTIE ESSENTIELLE DE CETTE LICENCE. AUCUNE UTILISATION DE LA DOCUMENTATION N'EST AUTORISÉE SANS L'APPLICATION DE CETTE DÉCHARGE.

Section G : RÉSILIATION

Cette licence, ainsi que les droits qui y sont concédés, sera résiliée de plein droit et de manière automatique si Vous ne respectez pas les conditions de celle-ci et si vous ne corrigez pas votre manquement à ses obligations dans un délai de 30 jours à partir du moment où vous avez connaissance d'un tel manquement. Toutes sous-licences de la Documentation qui ont été concédées en respect des obligations resteront en vigueur malgré la résiliation de cette licence. Toute clause qui, de par sa nature nécessite qu'elle survive à la résiliation, demeurera en vigueur.

Section H : LIMITATION DE RESPONSABILITÉ

DANS AUCUNE CIRCONSTANCE, OU SELON AUCUNE THÉORIE DE DROIT, QU'ELLE SOIT DELICTUELLE (Y COMPRIS NÉGLIGENCE), CONTRACTUELLE, OU DE QUELQU'AUTRE MANIÈRE QUE CE SOIT, L'AUTEUR INITIAL, TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR, OU DISTRIBUTEUR DE LA DOCUMENTATION, OU TOUT FOURNISSEUR DE L'UNE QUELCONQUE DES PARTIES PRÉCÉDEMMENT NOMMÉES, NE POURRONT ÊTRE TENUS RESPONSABLE ENVERS QUICONQUE POUR TOUT DOMMAGE DIRECT, INDIRECT, PARTICULIER, INCIDENT, OU CONSÉQUENT DE QUELQUE NATURE QUE CE SOIT, COMPRENANT, SANS LIMITATION, DES DOMMAGES IMPUTABLES A LA PERTE D'UN FONDS DE COMMERCE, ARRÊT DE TRAVAIL, PANNE OU DYSFONCTIONNEMENT D'ORDINATEUR, OU TOUS AUTRES DOMMAGES OU PERTES PROVOQUÉS PAR OU LIÉS À L'UTILISATION DE LA DOCUMENTATION, MÊME SI UNE TELLE PARTIE A ÉTÉ PRÉVENUE DE LA POSSIBILITÉ DE TELS DOMMAGES.

Section I : DISPOSITIONS FINALES

Cette Licence représente l'accord complet relatif à l'objet de celle-ci. Si une quelconque clause de cette Licence devrait être considérée comme nulle ou inapplicable, une telle clause ne sera modifiable que dans la mesure où elle puisse devenir applicable et valable. Dans tout différend ou litige dans l'application ou l'interprétation de cette licence, la partie perdante prendra en charges tous frais, y compris sans limitation, tous frais de procédure et des frais et dépenses d'avocats raisonnables. L'application de la Convention des Nations Unies régissant des Contrats pour la Vente Internationale de Marchandises est expressément exclue.

Section J : Annexe

La documentation originale s'intitule « Centrale 1985, Math. I, Option M ». L'Auteur initial de la documentation originale est Robert Cabane. Copyright © 2005. Tous droits réservés. (Coordonnées de l'auteur initial : rcab AT free.fr).