Devoir en temps libre 14, pour le 15/03/2017

Ce sujet est le sujet du concours commun Mines-Ponts 2005*. Le vrai sujet commence à la partie I, la partie* 0 *a été ajoutée pour définir la notion de norme subordonnée qui n'est plus au programme. On en profite aussi pour démontrer deux résultats qui étaient admis dans l'énoncé original.*

Notations

n est un entier au moins égal à n.
On note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}$. Pour toute matrice carrée M on note ${}^tM$ sa matrice transposée, $\det(M)$ son déterminant et $\operatorname{tr}(M)$ sa trace. La matrice identité (ou unité) de $M_n(\mathbb{R})$ est notée I.
Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique (respectivement anti-symétrique) lorsque $M = {}^tM$ (respectivement $M = -{}^tM$). On note S_n (respectivement A_n) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (respectivement anti-symétriques).

0. Mise en place.

1) Montrer que si A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent alors elles sont simultanément diagonalisables. C'était le premier résultat admis dans l'énoncé original.
2) Montrer que l'application

$$N : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \sup_{\|X\|=1} \|MX\| \end{array}$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On l'appelle la norme subordonnée à la norme $\|.\|$.
Comme le faisait l'énoncé original nous noterons aussi $\|M\|$ au lieu de $N(M)$ l'image de M par N.
3) Montrer que que

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

En déduire une majoration de $\|A^p\|$ si A est dans $M_n(\mathbb{R})$ et p est un entier.
4) Montrer que la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} A^p$ est convergente pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. On notera $\exp(A)$ ou e^A sa somme.
5) Montrer que si A et B, dans $M_n(\mathbb{R})$ commutent alors e^A et B commutent aussi.
6) Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} A^p \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi'_A(t) = A\Phi_A(t) = \Phi_A(t)A.$$

On remarquera, et on exploitera cette remarque, que chaque coefficient de $\Phi_A(t)$ est la somme d'une série entière.
7) En déduire une démonstration du deuxième résultat admis dans l'énoncé original : si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. On démontrera ici ce résultat en prouvant que

$$t \mapsto \exp(t(A + B)) \text{ et } t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)$$

sont solution d'un même problème de Cauchy linéaire.

On va maintenant démontrer le résulat suivant.

Soient A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont notées respectivement $(a_k, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k, 1 \leq k \leq n)$. Alors on a l'inégalité :

$$\det(A+B) \leq \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}), \tag{1}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

I. Préliminaires

8) Montrer que
$$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).$$
9) On note $(E_{(i,j)}, (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\})$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Pour M dans $M_n(\mathbb{R})$, expliciter $\mathrm{tr}\,(ME_{(i,j)})$ en fonction des coefficients de M.
10) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice T de A_n, $\mathrm{tr}\,(MT) = 0$. La matrice M est-elle symétrique ou anti-symétrique ?
11) Soit T dans A_n. Montrer que e^T est orthogonale.
12) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout s dans un voisinage de 0,
$$e^{sM} = I + sM + \mathcal{O}(s^2). \tag{2}$$
13) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, pour j dans $\{0, \dots, n\}$, on note $\alpha_j(M)$ le coefficient de X^j dans le polynôme caractéristique de M :
$$\det(XI - M) = \sum_{j=0} \alpha_j(M) X^j.$$
Montrer que pour tout j de $\{0, \dots, n\}$, l'application $(M \mapsto \alpha_j(M)$ est continue.
14) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour s dans un voisinage de 0,
$$\det(I + sM) = 1 + s\,\mathrm{tr}\,(M) + \mathcal{O}(s^2),$$
et que
$$\det(I + sM + \mathcal{O}(s^2)) = 1 + s\,\mathrm{tr}\,(M) + \mathcal{O}(s^2). \tag{3}$$
15) On suppose que M n'est pas inversible. Construire une matrice N_0 de $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $s > 0$, on ait $\det(M + sN_0) > 0$.
16) Montrer qu'on peut choisir N_0 diagonalisable (respectivement symétrique) si M est diagonalisable (respectivement symétrique).

II. Démonstration de l'inégalité (1)

On rappelle que A et B sont des matrices symétriques réelles.

17) Montrer que si les matrices A et B commutent alors il existe σ dans $\mathcal{S}_n$ telle que :
$$\det(A+B) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

18) Soit $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{O}_n$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.

19) Pour tout M de $M_n(\mathbb{R})$, on considère la partie $\mathcal{O}_n(M)$ de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1}; U \in \mathcal{O}_n(M)\}.$$

Montrer qu'il existe B_0 dans $\mathcal{O}_n(B)$ telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C).$$

II.1 $A + B_0$ inversible

De cette question à la question 24, on suppose que $A + B_0$ est inversible.
Pour T dans A_n et pour toutréel s, on définit $\psi_T(s)$ par

$$\psi_T(s) = \det(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}).$$

20) Montrer que pour tout s au voisinage de 0, on a

$$\psi_T(s) = \det(A + B_0) \left[1 + s \operatorname{tr} \left((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}\right)\right] + \mathcal{O}(s^2). \tag{4}$$

21) Montrer que pour tout s réel, on a $\psi_T(s) \leq \psi_T(0)$.

22) Montrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \operatorname{tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0). \tag{5}$$

23) Montrer que B_0 commute avec $(A + B_0)^{-1}$ et A.

24) Montrer l'inégalité (1).

II.2 $A + B_0$ singulière

On suppose dorénavant que $A + B_0$ n'est pas inversible.

25) Montrer qu'il existe deux suites d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$, $(B_k, k > 0)$ et $(N_k, k > 0)$ telles que
   (i) N_k converge vers B_0 quand k tend vers $+\infty$,
   (ii) B_k appartient à $\mathcal{O}_\backslash(\mathcal{N}_\|)$ pour tout $k > 0$
   (iii) $\det(A + N_k) \leq \det(A + B_k)$ pour $k > 0$.
   (iv) B_k commute avec A pour tout $k > 0$

26) Montrer l'inégalité (1).

III. Une permutation qui réalise le maximum

Indépendamment des matrices A et B, étant données deux suites de réels $(a_k, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k, 1 \leq k \leq n)$, on se propose de préciser l'inégalité (1), en explicitant une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ pour laquelle le produit

$$P(\sigma) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$$

est maximum.
On supposera que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$(H) \qquad \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \\ a_i + b_j > 0 \text{ pour tout } (i, j) \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la propriété $\pi(n)$ suivante : pour toutes les suites $(a_k, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k, 1 \leq k \leq n)$ verifiant (H) et toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}).$$

27) Etablir $\pi(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Indication : pour $n > 2$ et σ dans $\mathcal{S}_n$ donnés, on distinguera deux cas :

Cas 1 **:** σ vérifie $\sigma(n) = 1$. On montrera qu'il existe τ dans $\mathcal{S}_{n-1}$ telle que pour tout i de $\{1, \ldots, n-1\}$, $\sigma(i) = \tau(i) + 1$.

Cas 2 **:** Il existe $i < n$ et $j > 1$ tels que $\sigma(i) = 1$ et $\sigma(n) = j$ et on ramènera l'étude du second cas au premier en factorisant $P(\sigma)$ par $(a_i + b_1)(a_n + b_j)$.