
MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Fonctions de matrices

Notations :

- Les \mathbb{R} -algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :
 - ▶ L'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n .
 - ▶ Si I est un intervalle de \mathbb{R} , d'intérieur non vide, on note C_I^∞ l'algèbre commutative des fonctions de classe C^∞ de I dans \mathbb{R} .
 - ▶ L'algèbre des fonctions polynomiales de I dans \mathbb{R} est usuellement identifiée à l'algèbre $\mathbb{R}[X]$.
- On y rencontre aussi les \mathbb{R} -espaces vectoriels suivants :
 - ▶ L'espace des colonnes réelles à n lignes noté $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - ▶ L'espace $\mathbb{R}_N[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq N\}$, où $N \in \mathbb{N}$.
- Les notions de convergence dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{R})$ sont relatives aux normes respectives :
 - ▶ $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, si $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$.
 - ▶ $\|M\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$, si $M = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Objectifs du problème

Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on sait donner un sens à la matrice $P(A)$ et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur A qui en résulte. En particulier, si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on appelle POLYNÔME MINIMAL de M le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P(M) = 0$; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme u de \mathbb{R}^n dont M est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice $f(A)$ POUR TOUTE FONCTION f DE CLASSE C^∞ , et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice A .

Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur A .

Dans un second temps, on exploite ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

Notations fixées pour tout le problème :

- On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et l'on suppose que son polynôme minimal Π_A peut être écrit sous la forme : $\Pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec : $r \geq 1$; les λ_j sont des RÉELS distincts ; les m_j sont dans \mathbb{N}^* . On note alors $m = \sum_{1 \leq j \leq r} m_j$ le degré de Π_A .
- On considère aussi un intervalle I de \mathbb{R} , d'intérieur non vide et contenant tous les λ_j .

La matrice A et l'intervalle I sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

Préliminaires :

1. Établir que pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et M dans $M_n(\mathbb{R})$, on a : $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$.
2. Soit \mathcal{M} un sous-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$ de $M_n(\mathbb{R})$, et soit $\beta = (B_1, \dots, B_d)$ une base de \mathcal{M} .
 - a) Montrer que l'on définit une norme \mathcal{N} sur \mathcal{M} en posant $\mathcal{N}(M) = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$, si $M = \sum_{1 \leq k \leq d} x_k B_k$ est la décomposition de l'élément M de \mathcal{M} sur la base β .
 - b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives a et b vérifiant : $\forall M \in \mathcal{M}, a \|M\| \leq \mathcal{N}(M) \leq b \|M\|$.
 - c) Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{M} ; on note $M_p = \sum_{1 \leq k \leq d} x_p(k) B_k$ la décomposition de M_p sur β . Montrer que la suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ si et seulement si CHAQUE SUITE RÉELLE $(x_p(k))_{p \in \mathbb{N}}$ ($k = 1, \dots, d$) converge vers 0.

I Une relation d'équivalence sur C_I^∞

On convient de dire que des fonctions f et g de C_I^∞ « coïncident sur le spectre de A » lorsque : $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$. Ce que l'on résume par la notation $f \underset{A}{=} g$.

Un exemple : si $\Pi_A(X) = X^2(X + 1)$ la notation $f \underset{A}{=} g$ signifie : $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$ et $f(-1) = g(-1)$

3. Soient ℓ dans \mathbb{N}^* , λ dans I et f dans C_I^∞ vérifiant : $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$.
 - a) Établir l'identité : $\forall x \in I, f(x) = \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u) \, du$.
 - b) En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction h vérifiant :
 - (1) $\forall x \in I, f(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$
 - (2) $h \in C_I^\infty$
4. Soient f et g dans C_I^∞ .
 - a) On suppose : $\exists h \in C_I^\infty, f = g + h\Pi_A$.
En considérant les dérivées successives de $f - g$, établir que $f \underset{A}{=} g$.
 - b) On suppose $f \underset{A}{=} g$; en exploitant le 3. justifier l'existence de h dans C_I^∞ vérifiant :
 $f = g + h\Pi_A$.
5. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (1) $P \underset{A}{=} Q$
 - (2) $\exists H \in \mathbb{R}[X], P = Q + H\Pi_A$.

II Définition de la matrice $f(A)$

A. On considère l'application φ de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers \mathbb{R}^m qui associe à un polynôme P le m -uplet :

$$\varphi(P) = \left((P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leq k_1 \leq m_1-1}, \dots, (P^{(k_r)}(\lambda_r))_{0 \leq k_r \leq m_r-1} \right).$$

6. Établir le caractère bijectif de φ .
7. Soit f dans C_I^∞ ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme P_f de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ et tel que : $f \stackrel{A}{=} P_f$. On convient alors de DÉFINIR la matrice $f(A)$ en posant : $f(A) = P_f(A)$.

B. Quelques exemples

8. On suppose ici que f est polynomiale et l'on écrit : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$.
En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question 7, on obtient le résultat naturel : $f(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k$.
9. Ici : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.
 - a) Calculer $\Pi_A(X)$.
 - b) Calculer la matrice $f(A)$ dans chacun des cas suivants :
 - (1) $f(x) = ax + b$, les réels a et b étant donnés.
 - (2) $f(x) = \sin(\pi x)$
 - (3) $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, où la fonction g est donnée dans C_I^∞ .

III - Le calcul systématique de $f(A)$

A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire φ du II.A, justifier l'existence et l'unicité de polynômes $Q_{j,k}$ ($1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1$) vérifiant :

$$\text{pour TOUTE fonction } f \text{ de } C_I^\infty, \text{ on a : } P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$$

On considère alors les matrices dites « associées » à A :

$$Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \quad (1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1).$$

11. Montrer que les diverses matrices $Z_{j,k}$ sont linéairement indépendantes et que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

B. Deux exemples

12. Ici : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.
 - a) Justifier l'existence de matrices Z_1 et Z_2 de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2.$$
 - b) EN DÉDUIRE le calcul de Z_1 et Z_2 .
 - c) Calculer les matrices A^{2004} , \sqrt{A} et plus généralement A^α pour α dans \mathbb{R}_+^* .
13. Ici : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.
 - a) Présenter sous forme factorisée le polynôme $\Pi_A(X)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
 - b) Calculer les matrices $Z_{j,k}$ « associées » à A .

IV Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g dans C_I^∞ et α dans \mathbb{R} .
- Que valent $P_{\alpha f}$ et P_{f+g} ?
 - Justifier l'existence d'un polynôme H de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$.
15. a) Montrer que l'application $S : f \mapsto f(A)$ de C_I^∞ dans $M_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres.
- b) Quel est son noyau?
16. On considère les fonctions cosinus et sinus de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puis les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . On peut ainsi DÉFINIR les matrices $\cos A$, $\sin A$, et même \sqrt{A} et $\frac{1}{A}$ si les λ_j sont dans \mathbb{R}_+^* .
- En exploitant le morphisme S , calculer $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$.
 - On suppose ici que les λ_j sont strictement positifs. Reconnaître : $(\sqrt{A})^2$ et $\frac{1}{A}$.

B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté $\mathcal{M}_A = \{f(A) \mid f \in C_I^\infty\}$ est une sous-algèbre COMMUTATIVE de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
18. Montrer que si un élément de \mathcal{M}_A est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ alors son inverse est aussi dans \mathcal{M}_A .
19. Soit f dans C_I^∞ ; établir l'équivalence des énoncés suivants :
- $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$.
 - $\forall j \in \{1, \dots, r\}, f(\lambda_j) \neq 0$
20. Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on note Λ_M l'ensemble de ses valeurs propres RÉELLES. En exploitant la question 19 comparer les ensembles : Λ_A et $\Lambda_{f(A)}$ où f est donnée dans C_I^∞ .

V Application à la résolution d'un système différentiel

21. Soient $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de C_I^∞ et f dans C_I^∞ . Établir l'équivalence des énoncés suivants :
- La suite de matrices $(f_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$ vers $f(A)$.
 - Pour chaque j ($1 \leq j \leq r$) et chaque k ($0 \leq k \leq m_j - 1$), la suite réelle $(f_p^{(k)}(\lambda_j))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$.
- Lorsque la condition (2) est réalisée, on convient de dire que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ « converge vers f sur le spectre de A ».
22. Pour t réel, on considère la fonction $f_t : x \mapsto e^{tx}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que :
- $$f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell. \text{ Il s'agit donc précisément de la matrice usuellement notée } \exp(tA).$$
23. En exploitant les résultats acquis à ce stade du problème, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Fin de l'énoncé.