Problème sur les valeurs propres – Corrigé

Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2017

Partie I : Réduction de Jordan d'un nilpotent

1°) Nilpotents maximaux (d'indice maximal)..
Commençons par un lemme bien pratique pour la suite.

Lemme. *Pour tout endomorphisme nilpotent u d'indice p on a, pour tout entier $i < p$:* $\dim \operatorname{Ker} u^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} u^i = \operatorname{rg} u^i - \operatorname{rg} u^{i+1} \geqslant 1$.

On prouve ce lemme aisément en considérant la restriction de u à $\operatorname{Im} u^i$, qui a pour image exactement $\operatorname{Im} u^{i+1}$ (par définition), et à laquelle la formule du rang s'applique pour donner $\operatorname{rg} u^i - \operatorname{rg} u^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u^i$. La nilpotence assure que cette restriction ne peut être injective à moins que le sous-espace $\operatorname{Ker} u^i$ soit nul, soit $i \geqslant p$; on a donc $\dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u^i \geqslant 1$ pour $i < p$.
Revenons au cas $p = n$ avec L. Sommant toutes les inégalités précédentes (i allant de 0 à $p-1$), nous obtenons après simplifications $n = \operatorname{rg} L^0 - 0 \geqslant p = n$. Cette égalité oblige à avoir le cas d'égalité dans toutes les inégalités intermédiaires, soit encore $\dim \operatorname{Ker} L^{j+1} - \dim \operatorname{Ker} L^j = 1$. On somme pour j variant de 0 à $i-1$, et il vient $\dim \operatorname{Ker} L^i = i$.
2°) Condition suffisante de maximalité pour un nilpotent..
Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $h \in [\![1, n-1]\!]$ tel que L^h soit de rang $n-h$.
a) Reprenons l'idée de la sommation à partir du lemme. On trouve : $\sum_{i=0}^{h-1} \dim \operatorname{Ker} L^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} L^i = \dim \operatorname{Ker} L^h \geqslant h$. Or, le rang de L^h nous apprend que l'on a précisément $\dim \operatorname{Ker} L^h = h$. Dès lors, les inégalités qui ont été ajoutées sont toutes des égalités. Sommant de manière plus partielle (avec $j \in [\![1, h]\!]$), il vient alors $\sum_{i=0}^{j-1} \dim \operatorname{Ker} L^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} L^i = \dim \operatorname{Ker} L^j = j$, c'est-à-dire que le rang de L^j vaut $n-j$.
b) Considérons à présent la restriction de L au sous-espace $\operatorname{Im} L^i$: c'est une application linéaire surjective vers $\operatorname{Im} L^{i+1}$. En lui appliquant la formule du rang, nous obtenons $\dim \operatorname{Im} L^i = \dim \operatorname{Im} L^{i+1} + \dim \operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L$ (ce dernier sous-espace étant précisément le noyau de la restriction). Nous pouvons enfin reformuler ce résultat comme $1 \leqslant \operatorname{rg} L^i - \operatorname{rg} L^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} L^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} L^i = \dim \operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L$.
c) La question 2°a nous montre que le noyau de L est de dimension 1, ce qui nous assure d'avoir $\dim \operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L \leqslant 1$, et en fait égalité puisque les puissances de L ont des rangs strictement décroissants. En fin de compte, il vient $\operatorname{rg} L^i - \operatorname{rg} L^{i+1} = 1$, soit $\operatorname{rg} L^i = n - i$ par sommation. En particulier, L^{n+1} n'est pas nul, tandis que L^n l'est :

$$\boxed{\text{Si } \dim \operatorname{Ker} L^h = h \text{ pour } h \leqslant n-1 \text{ alors } L \text{ est d'indice } n.}$$

3°) Sous-espaces stables par un nilpotent maximal..
Lorsque le rang de L est égal à $n-1$, un choix évident de $n+1$ sous-espace stables par L apparaît, ce sont les $\operatorname{Ker} L^i$ pour $i \leqslant n$. Considérons un sous-espace stable F de dimension d : la restriction u' de u à F est encore nilpotente, d'indice $q \leqslant d$ par exemple. On a donc $F \subset \operatorname{Ker} u^q$. Cependant, nous savons que $\operatorname{Ker} u^q$ est de dimension q ; la comparaison des dimensions nous assure d'avoir $d = q$ et $F = \operatorname{Ker} u^q$. On pourrait aussi montrer que $\operatorname{Ker} u^q = \operatorname{Im} u^{n-q}$, mais cela ne donne pas de nouveau sous-espace stable.

Partie II : Équation matricielle $(*)$ $[A, B] = AB - BA = \alpha B$

1°) a) $[U, VW] = UVW - VUW + VUW - VWU = [U, V]W + V[U, W]$.
b) On prend d'abord $P = X^k$ et on montre par récurrence que $[A, B^k] = \alpha k B^k$: pour $k = 1$ c'est l'hypothèse initiale, et si c'est le cas pour k alors

$$[A, B^{k+1}] = [A, B^k B] = [A, B^k]B + B^k[A, B] = \alpha k B^{k+1} + \alpha B^{k+1} = \alpha(k+1)B^{k+1}\,.$$

La formule $[A, P(B)] = \alpha B P'(B)$ est ainsi vraie pour toute monôme donc, par linéarité, vraie pour tout polynôme P. Si $B^k x = 0$ alors $AB^k x - B^k A x = -B^k A x = \alpha k B^k x = 0$, ce qui amène $Ax \in \operatorname{Ker} B^k$.
c) Choisissons $P = \mu_B$ ci-dessus, de degré d. Il vient $0 = \alpha B \mu_B'(B)$, c'est-à-dire que $X\mu_B'$ est annulateur ; par différence, on a aussi $d\mu_B(X) - X\mu_B'(X)$ qui est annulateur de B ; or, ce dernier polynôme est de degré inférieur à d (les coefficients dominants se compensent). La minimalité de μ_B fait que l'on doit avoir $d\mu_B(X) = X\mu_B'(X)$; en écrivant les coefficients de μ_B on voit que $\mu_B = X^d$, c'est-à-dire que B est nilpotent.
Autre solution : On peut également introduire l'application linéaire Φ telle que $\Phi(f) = [A, f]$ – c'est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Si les B^k n'étaient jamais nuls, on aurait pour Φ une infinité de valeurs propres, les αk pour $k \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible en dimension finie.
2°) Cas particulier où B est maximal..
a) Si B est maximal (d'indice n), on peut appliquer la question I2° avec $h = 1$ pour voir que B est d'indice n puis que le rang de B^{n-1} est 1. Choisissons alors y dans $\operatorname{Im} B^{n-1}$, et x tel que $y = B^{n-1}(x)$, puis posons $x_k = B^{n-k}(x)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. On a déjà $B^k(x_k) = B^n(x) = 0$, soit encore $x_k \in \operatorname{Ker} B^k \subset \operatorname{Ker} B^{k+s}$, ce qui assure d'avoir $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \operatorname{Ker} B^k$. Comme ce sous-espace est certainement de dimension k, il reste à voir que la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre.

b) On a vu que $\operatorname{Ker} B^k$ est stable par A ; en particulier, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Vect}(x_1)$ l'est, ce qui force une relation du type $Ax_1 = \lambda x_1$: on a bien un vecteur propre de A. Plus généralement, les sous-espaces emboîtés $\operatorname{Ker} B^k$ forment un drapeau de sous-espaces stables par A, donc A est trigonal dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$. Les coefficients diagonaux de la matrice sont les valeurs propres de A (éventuellement répétées). Pour les connaitre, examinons Ax_k. Par stabilité, on sait que $Ax_k \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$, ce qui s'écrit $Ax_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j x_j$. On applique B^{k-1} sur cette décomposition :

$$AB^{k-1}x_k - B^{k-1}Ax_k \begin{cases} = Ax_1 - \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j B^{k-1}x_j = (\lambda - \xi_k)x_1 \\ = \alpha(k-1)B^{k-1}x_k = \alpha(k-1)x_1 \end{cases}$$

ce qui amène $\xi_k = \lambda - \alpha(k-1)$. C'est précisément la composante de Ax_k qui donne un coefficient diagonal de la matrice.

En fin de compte, $\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda, \ldots, \lambda - \alpha(k-1), \ldots, \lambda - \alpha(n-1)\}.}$

c) Supposons que $Ax = \mu x$. Reportant dans l'équation $(*)$ il vient $ABx - BAx = \alpha Bx$ soit $ABx = (\alpha + \mu)Bx$; dans ces conditions, ou bien Bx est nul, ou bien c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\alpha + \mu$.
Remarque. On obtient sans doute ici des valeurs propres $\alpha + \mu, \alpha + 2\mu$, etc, mais la nilpotence de B met inévitablement un terme à ce processus.
d) Soit $Ae_n = (\lambda - (n-1)\alpha)e_n$ (il existe d'après la question 2°b), puis $e_k = B^{n-k}(e_n)$. La question précédente nous dit que $e_{n-1} = Be_n$ est, ou bien nul, ou bien un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - \alpha(n-2)$. Or, $Be_n = 0$ signifierait que e_n serait dans $\operatorname{Ker} B$, donc proportionnel à x_1, et enfin vecteur propre pour la valeur propre λ, ce qui n'est pas. On continue pareillement : on suppose montré que $e_{n-k+1} = B^{k-1}e_n$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - \alpha(n-k)$, et on en déduit que $e_{n-k} = B^k e_n$ est ou bien nul ou bien un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - \alpha(n-k-1)$; mais $B^k e_n = 0$ situerait e_n dans $\operatorname{Ker} B^k = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$, sous-espace stable par A sur lequel A n'admet que les valeurs propres $\lambda, \ldots, \lambda - (k-1)\alpha$: c'est impossible.
Voici enfin les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - (n-1)\alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III : Système d'équations $[A, B] = \alpha B$, $[A, C] = \beta C$, $[B, C] = A$.

1°) $(\alpha + \beta)[B, C] = [A, B]C - C[A, B] + B[A, C] - [A, C]B$ remplaçant αB par sa valeur...
$= [A, BC] - [A, CB]$ par le II1°a
$= [A, BC - CB] = 0$ par bilinéarité du crochet.
Or, on se place dans le cas où $A = [B, C]$ est non nulle ; c'est pourquoi on a $\beta = -\alpha$.
2°) Lorsque B est d'indice maximal..
Avec la partie II nous savons que B et C sont nilpotentes et que les noyaux itérés de B et de C sont stables par A. Supposons que le rang de B est $n-1$, ce qui rend B d'indice $n-1$ (puisque le noyau de B est de dimension 1 ainsi que tous les sous-espaces $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Im} B^k$).
a) La relation $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$ amène $\operatorname{tr}(A) = 0$. En appliquant la question II2°b on a

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda - \alpha(k-1) = n\lambda - \frac{n(n-1)}{2}\alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{n-1}{2}\alpha}\ .$$

Du coup, on a le spectre de A : $\operatorname{Sp}(A) = \{(n-1)\frac{\alpha}{2}, (n-3)\frac{\alpha}{2}, \ldots, -(n-1)\frac{\alpha}{2}\}$, ensemble qui inclut 0 si et seulement si n est impair. C'est pourquoi A est inversible si n est pair, et de rang $n-1$ sinon.
b) Notons c_{ij} le coefficient général de la matrice de C dans la base vue au II qui simplifie les matrices de A et B, et $d_i = \frac{n-2i+1}{2}\alpha$ le coefficient diagonal correspondant de A. Calculons le coefficient général de $AC - CA = \beta C = -\alpha C$:

$$(d_i - d_j)c_{ij} = -\alpha c_{ij} \implies c_{ij} = 0 \quad \text{si } d_i - d_j = (j-i)\alpha \neq -\alpha$$

ce qui signifie pratiquement que la matrice C ne possède des coefficients non nuls que juste en-dessous de la diagonale principale. Notons alors, pour simplifier, $\gamma_j = c_{j+1,j}$ pour $j \leqslant n-1$. Pour préciser C on se reporte à $BC - CB = A$, ce qui s'écrit pour les coefficients diagonaux

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k-1}c_{ki} - c_{ik}\delta_{k,i-1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} = \frac{n-2i+1}{2}\alpha$$

avec au début $(i=1)$ $\gamma_1 = \frac{n-1}{2}\alpha$, puis

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{n-2i+1}{2}\alpha = k\frac{n+1}{2}\alpha - \alpha\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(n-k)}{2}\alpha\,.$$

Ces nombres ne sont pas nuls, donc le rang de C vaut $n-1$ (comme pour B).
c) Les sous-espaces stables par B sont connus (question I3°), ils sont ici de la forme $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Ces sous-espaces sont aussi stables par A (diagonale). La structure de C conduit à un résultat analogue mais incompatible : $\operatorname{Vect}(e_p, \ldots, e_n)$. C'est ainsi que $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables à la fois par B et C.
3°) Cas $\alpha = 2$ et sans sous-espace stable commun.

a) Soit $(\mathcal{H}_i)$ la proposition $[B, C^i] = iC^{i-1}(A - (i-1)\,\mathrm{id})$. L'hypothèse fournit directement $(\mathcal{H}_1)$. Supposons $\mathcal{H}_i$ acquise. On calcule un peu :

$$\begin{aligned}[B, C^i.C] &= [B, C^i]C + C^i[B, C] = iC^{i-1}(A - (i-1)\,\mathrm{id})C + C^iA \\ &= iC^{i-1}AC - i(i-1)C^i + C^iA = C^{i-1}[iAC - i(i-1)C + CA] \\ &= C^{i-1}[(i+1)CA - (i^2+i)C] = C^i[(i+1)A - i(i+1)\,\mathrm{id}]\end{aligned}$$

et c'est exactement $(\mathcal{H}_{i+1})$.
Or, nous savons que C est nilpotent (question II1°c). Avec $C^i = 0$ et $C^{i-1} \neq 0$ nous trouvons que $A - (i-1)\,\mathrm{id}$ ne peut être inversible, ce qui fait de $i-1$ une valeur propre (entière) de A.
b) On sait déjà que B et C sont nilpotents et que A possède au moins un vecteur propre x_0. La question $II.2.b$) montre en l'itérant que pour tout i C^ix_0 est nul ou est un vecteur propre de A. Soit i_0 le i maximal tel que $C^ix_0 \neq 0$.
Posons $x_1 = C^{i_0}x_0$. x_1 est un vecteur propre de A et $Cx_1 = 0$.
La question $II.2.b$) montre que pour tout i B^ix_0 est nul ou est un vecteur propre de A. Définissons comme pour C l'exposant maximal i_1 tel que $B^ix_0 \neq 0$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, Bx_1, \ldots, B^{i_1}x_1)$. Il est stable par B, chaque vecteur étant transformé en le suivant et le dernier en 0, il est stable par A car engendré par des vecteurs propres de A. Finalement la relation de commutation $[B^i, C] = iB^{i-1}(A + (i-1)I)$, qui se justifie comme en $III.3.a$, joint à $Cx_1 = 0$ montrer que $CB^ix_1 = \mu_iB^{i-1}x_1$ pour $i \geqslant 1$, donc que F est stable par C.
Finalement F est non réduit à $\{0\}$ car il contient x_1, il est stable par A, B et C. Il est donc égal à E. Donc i_1 est au moins égal à $n-1$, en fait exactement égal, car les éléments du système générateur sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, donc ils forment une famille libre. Donc l'indice de nilpotence de B est au moins n, c'est-à-dire n. Donc B est de rang $n-1$. De plus $(x_1, Bx_1, \ldots, B^{i_1}x_1)$ est une base de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.