ÉCOLE POLYTECHNIQUE **OPTION MP**

CONCOURS D'ADMISSION 1998

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbb{C}$. On rappelle que, si K est un sous-corps d'un corps K', ce dernier est, en particulier, un K-espace vectoriel, ce qui donne un sens à la K-dimension de K', notée $\dim_K(K')$.

Si K est un corps, on note $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K. On dit qu'un polynôme de degré > 0 est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0. Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question **1** est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question **2** n'est pas utilisée dans la suite.

Première partie

On désigne par K un sous-corps de $\mathbb{C}$, par α un nombre complexe non nul, par $K[\alpha]$ le sous-K-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres $\alpha^n, n = 0, 1, 2, ...$, enfin par $I_K(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ annulés par α.

1.a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \dim_K(K[\alpha]) < +\infty$$
$$(ii) \quad I_K(\alpha) \neq \{0\}.$$

Si elles sont remplies, on dit que α est *K-algébrique*, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que tout élément de $I_K(\alpha)$ soit un multiple de P, et que P est irréductible.

Ce polynôme P sera noté $P_K(\alpha)$ et appelé *polynôme K-minimal* de α.

c) Comparer le degré de $P_K(\alpha)$ et $\dim_K(K[\alpha])$.

d) Montrer que $K[\alpha]$ est un corps.

2. *Applications numériques.* On prend $K = \mathbb{Q}$.

a) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Deuxième partie

On définit K et α comme dans la première partie. On suppose que α est K-algébrique et on pose $n = \dim_K(K[\alpha])$.

3. Montrer que, si P est un élément irréductible de $K[X]$, ses zéros dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

4.a) On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les zéros de $P_K(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour tout $i = 1, ..., n$, il existe un unique morphisme de K-algèbres σ_i de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.

b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de K-algèbres de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$?

5. Montrer que si β est un élément de $K[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $K[\alpha] = K[\beta]$.

6. Etant donné un élément β de $K[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $K[\alpha]$ vérifiant $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

[On pourra introduire, pour $i \neq j$, l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments λ de K vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)]$$

Troisième partie

On fixe un nombre complexe $\mathbb{Q}$-algébrique non nul θ, et on pose $K = \mathbb{Q}[\theta]$, $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$. On note σ_i, $i = 1, \ldots, n$, les morphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de K dans $\mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, α désigne un élément de K ; on appelle M_α l'endomorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K défini par $M_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ pour tout $\beta \in K$, et Δ_α son polynôme caractéristique défini par $\lambda \mapsto$ dét $(\lambda \mathrm{I} - M_\alpha)$.

7. On pose $m = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$, $d = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]}(K)$. Vérifier que, si $(e_1, ..., e_d)$ est une $\mathbb{Q}[\alpha]$ - base de K, les éléments $\alpha^p e_r$ où $p = 0, ..., m-1$ et $r = 1, ..., d$, forment une $\mathbb{Q}$-base de K.

8.a) Démontrer l'égalité $\Delta_\alpha = (P_{\mathbb{Q}}(\alpha))^d$.

[On pourra examiner d'abord le cas où $\mathbb{Q}[\alpha] = K$]

b) Démontrer l'égalité $\mathrm{Tr}(M_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$.

9. Pour tout n-uple $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de K^n, on pose

$$D(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \text{dét}\left(\mathrm{Tr}(M_{\alpha_i \alpha_j})\right)_{i,j=1,...,n} .$$

Exprimer $D(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ en fonction de dét $\left(\sigma_i(\alpha_j)\right)_{i,j=1,...,n}$.

10. Soit $A = \left(A_{i,j}\right)_{i,j=1,...,n}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et soit $\beta_i = \sum_{p=1}^{n} A_{i,p}\alpha_p$. Vérifier que

$$D(\beta_1, ..., \beta_n) = (\text{dét } A)^2 D(\alpha_1, ..., \alpha_n) .$$

11. Montrer que

$$D(1, \theta, ..., \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)) .$$

12. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $D(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, pour qu'un n-uple $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ soit une $\mathbb{Q}$-base de K.

13.a) Vérifier que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet un unique zéro réel, que l'on note θ.

b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de θ.

c) Calculer $D(1, \theta, \theta^2)$.

* *
*