Polytechnique — Mathématiques I — MP 2007

Première partie

1) Notons $u_n(t,x) = e^{-|n|t} e^{inx}$

- Si $t \leq 0$ $|u_n(t,x)| \geqslant 1$ donc $(u_n(t,x))_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers zéro, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t,x)$ n'est pas convergente donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ n'est pas convergente

- Si $t > 0$ $|u_n(t,x)| = (e^{-t})^{|n|}$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n(t,x)$ converge absolument ($e^{-t}\in[0,1[$) ainsi que $\sum_{n<0} u_n(t,x)$

Donc si $t<0$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ converge.

Finalement $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ converge ssi $t>0$

2) Supposons $t>0$ et soit $u_{n,t} : x \mapsto e^{-|n|t} e^{inx}$

- $\forall n\in\mathbb{Z}$ $u_{n,t}$ est continue.
- $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ $|u_{n,t}(x)| \leq e^{-t|n|}$

$\sum_{n\geqslant 0} e^{-t|n|}$ et $\sum_{n<0} e^{-t|n|}$ convergent

donc $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,t}$ et $\sum_{n<0} u_{n,t}$ convergent normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$.

On peut permuter intégration et sommation.

Or si $n\neq 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \left[\frac{1}{in}e^{inx}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

PS: $P(t,x)$ est réel car la bijection $n\mapsto -n$ donne $P(t,x) = \overline{P(t,x)}$

Donc $\int_{-\pi}^{\pi} P(t,x)\,dx = 2\pi$

3 a) Soit ~~x~~ m un entier et $(x_1, \dots, x_m) \in \{t, x\}^m$ (2)

~~Pour tout~~ Pour tout n dans $\mathbb{Z}$ $\dfrac{\partial^m u_n}{\partial x_m \dots \partial x_1}(x,t)$ est définie sur

$\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et vaut $(-|n|)^p (in)^q u_n(x,t)$ où

$p = \mathrm{card}\{i, x_i = t\}$ et $q = \mathrm{card}\{i, x_i = x\}$ $(p+q = m)$

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$

$\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ $\left| \dfrac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m}(x,t) \right| \leq |n|^m e^{-a|n|} = \alpha_{n,m}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_{n+1,m}}{\alpha_{n,m}} = e^{-a} < 1$. Donc $\sum\limits_{n \geq 0} \alpha_{n,m}$ converge

de même $\sum\limits_{n \geq 0} \alpha_{n,m}$ converge.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \{t, x\}^m$ $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{\partial^m u_n}{\partial x_m \dots \partial x_1}$

et $\sum\limits_{n < 0} \dfrac{\partial^m u_n}{\partial x_m \dots \partial x_1}$ convergent normalement donc uniformément

sur $[a,b] \times \mathbb{R}$. (pour tout $[a,b]$ contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$)

Il en résulte que P est indéfiniment différentiable sur

$\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ $\dfrac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial x^q} P(t,x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^q u_n(x,t)$.

Rq. Ceci est une rédaction rapide de cette question, qui contient l'essentiel. Mais une démonstration respectueuse du programme devrait démontrer par récurrence sur m que $\dfrac{\partial^m}{\partial x_m \dots \partial x_1} P$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$

Le plan à suivre est le suivant

1) Le résultat est vrai à l'ordre $m=0$ (vu en 2)

2) On le suppose vrai à l'ordre $(m-1)$, $m \geq 1$, pour toute suite $(x_1, \quad , x_{m-1})$

On distingue alors deux cas

2a) $x_m = t$ ou $x_m = x$

les deux cas étant similaires, on se limite au cas $x_m = t$.

2b) Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

On choisit η tel que $]t_0-\eta, t_0+\eta[\subset \mathbb{R}^{*+}$

On considère la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n(t)$ (qu'en toute rigueur on devrait décomposée et $\sum_{n\geq 0}$ et $\sum_{n<0}$) avec

$$v_n(t) = \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_{m-1} \quad \partial x_1} u_n\right)(t, x_0) = (-|n|)^{p-1} (in)^q u_n(t, x_0)$$

① Pour tout n v_n est de classe $\mathcal{C}^1$

② $\forall t \in]t_0-\eta, t_0+\eta[$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n(t)$ converge.

③ $\forall t \in]t_0-\eta, t_0+\eta[$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $|v_n'(t)| \leq \underbrace{|n|^{p+q} e^{-(t_0-\eta)|n|}}_{\beta_n}$

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n$ converge.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n'$ converge normalement donc uniformément sur $]t_0-\eta, t_0+\eta[$.

(1), ② et ③ permette d'affirmer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0-\eta, t_0+\eta[$ et possède en particulier une dérivée en t_0.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_{m-1} \quad \partial x_1} P\right)\right)(t_0, x_0) \text{ existe et vaut } \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n'(t_0)$$

Or pour tout n $V_n'(t_0) = \left(\frac{\partial^m}{\partial x_m \quad \partial x_1} u_n\right)(x_0, t_0)$.

On a donc prouvé que

$\frac{\partial^m \quad P}{\partial x_m \quad \partial x_1}$ existe sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ avec.

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \quad \left(\frac{\partial^m}{\partial x_m \quad \partial x_1} P\right)(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^q e^{-t|n|} e^{inx}$$

2c) La continuité de $\frac{\partial^m}{\partial x_m \quad \partial x_1} P$ s'établit en

remarquant que puisque $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ $\left([a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}\right)$

$$\left| (-|n|)^p (in^q) e^{-t|n|} e^{inx} \right| \leq e^{-a|n|}$$

et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a|n|}$ converge.

Il y a convergence normale donc uniforme sur tout $[a,b] \times \mathbb{R}$ d'une série de fonctions continues.

Sa somme est donc bien continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

3b) $$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 e^{-t|n|} e^{inx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 e^{-t|n|} e^{inx}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

<u>Culture</u> on dit que P est harmonique. P s'appelle le noyau de Poisson.

4) Comme en 2, puisque $e^{-inx} P_t(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-t|m|} e^{i(m-n)x}$

avec $\left| e^{-t|m|} e^{i(m-n)x} \right| = e^{-t|m|}$, on peut permuter

intégration et sommation et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \hat{P}_t(n) = e^{-t|n|}$$

5) $e^{-2t} - 2e^{-t}\cos x + 1 = (e^{-t} - \cos x)^2 + 1 - \cos^2 x = (e^{-t} - \cos x)^2 + \sin^2 x$

Donc $e^{-2t} - 2e^{-t}\cos x + 1 = 0 \iff \begin{cases} \cos x = e^{-t} \\ \sin x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \\ t = 0 \end{cases}$

6) $t>0$ $\quad P(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(t-ix)}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-(t+ix)}\right)^n$

$$= \frac{1}{1-e^{-(t-ix)}} + \frac{e^{-(t+ix)}}{1-e^{-(t+ix)}}$$

$$= \frac{1 - e^{-(t-ix)} + e^{-(t+ix)} - e^{-2t}}{1 - e^{-t}(e^{ix} + e^{-ix}) + e^{-2t}}$$

$$P(t,x) = \frac{1-e^{-2t}}{1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t}}$$

On a $\forall t>0 \quad 1 - e^{-2t} > 0$

$\forall t \neq 0 \quad (1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t}) > 0$ (question 5)

donc $\forall t>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad P(t,x) > 0$

7) Si $x \in [-\pi, \pi] - \{0\}$ $\lim\limits_{t \to 0^+} 1 - 2e^{-t}\cos x + e^{-2t} = 2(1-\cos x) > 0$

$\lim\limits_{t \to 0^+} 1 - e^{-2t} = 0$

Donc si $x \in [-\pi, \pi] - \{0\}$ $\lim\limits_{t \to 0^+} P_t(x) = 0$

De plus $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|x| \geq a$ $a \in]0, \pi[$

on a $\cos x \leq \cos a$

donc $-2e^{-t}\cos x \geq -2e^{-t}\cos a$

$$1 - 2e^{-t}\cos x + e^{-2t} \geq 1 - 2e^{-t}\cos a + e^{-2t}$$

et $0 \leq P_t(x) \leq \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t}\cos a + e^{-2t}}$

donc $\sup\limits_{x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi]} |P_t(x)| \leq \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t}\cos a + e^{-2t}}$

et on a bien $\lim\limits_{t \to 0^+} \sup\limits_{x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi]} |P_t(x)| = 0$

ce qui est bien la convergence uniform vers 0 de (P_t) lorsque t tend vers 0^+, sur $[-\pi, -a] \cup [a, \pi]$

Deuxième partie.

8) $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty \, dx = \|f\|_\infty$

La famille $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{-|n|t} e^{inx}$ se justifie alors comme celle de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$.

9) La démonstration est exactement la même que pour P.
Il suffit de multiplier les majorations par $\|f\|_\infty$.

10) $P_t(x-y)f(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{e^{-|n|t} e^{+inx} e^{-iny} f(y)}_{w_n(y)}$

$|w_n(y)| \leq e^{-|n|t}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}$. On a la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n$ sur le segment $[-\pi,\pi]$, on peut permuter intégration et sommation, par conséquent :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)\,dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y)\,dy}_{\hat{f}(n)}$$

et $\quad \Phi_{f,t}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)\,dy = 0$

11) Intéressons nous tout d'abord au cas $k=0$.
Soit f dans C^0_{per} : f est continue et 2π-périodique donc uniformément continue. (Savoir démontrer ce résultat)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)\,dy = -\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} P_t(u)\,du$

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} P_t(u)\,du = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(u)\,du}_{\text{car } P_t \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}} = 1$$

On a donc

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \Phi_{f,t}(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \Phi_{f,t}(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(u)\big(f(x-u)-f(x)\big)\,du$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(u)\,|f(x-u)-f(x)|\,du$

car $P_t(u) \geq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a remarqué que f était uniformément continue. Il existe donc $a \in]0,\pi[$ tel que $|u| \leq a \Rightarrow |f(x-u)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Choisissons un tel a.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-a} P_t(u) \times 2\|f\|_\infty + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} P_t(u)\,du\right) \times \frac{\varepsilon}{2}$

$+ \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{\pi} P_t(u)\,\|f\|_\infty\,du$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \sup_{u \in [-\pi,-a] \cup [a,\pi]} P_t(u) + \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} P_t(u)\,du \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(u)\,du = 1$

Or d'après 7) $\lim_{t \to 0^+} 2\|f\|_\infty \sup_{u \in [-\pi,-a] \cup [a,\pi]} P_t(u) = 0$

Donc $\exists \eta > 0 \quad \forall t \in]0,\eta[\quad 2\|f\|_\infty \sup_{u \in [-\pi,-a] \cup [a,\pi]} P_t(u) < \frac{\varepsilon}{2}$

On a donc prouvé : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall t \in]0, \eta[\ \forall x \in \mathbb{R}\ |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ce qui veut dire $\lim\limits_{t \to 0^+} \| \Phi_{f,t} - f \|_\infty = 0$.

Supposons maintenant f dans C^k_{per}, $k \geq 1$

le changement de variable $u = x - y$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi_{f,t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{P_t(u) f(x-u)}_{h_t(x,u)} \, du$$

$+ \ \forall j \in [0, k] \quad \dfrac{\partial^j h_t}{\partial x^j}(x,u) = P_t(u) f^{(j)}(x-u)$

est définie sur $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$.

$+ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall j \leq k-1 \quad u \mapsto \dfrac{\partial^j h_t}{\partial x^j}(x,u)$ est continue

sur $[-\pi, \pi]$ donc intégrable.

$+ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad u \mapsto \dfrac{\partial^k h_t}{\partial x^k}(x,u)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall u \in [-\pi, \pi] \quad \left| \dfrac{\partial^k h_t}{\partial x^k}(x,u) \right| \leq \dfrac{1}{2\pi} P_t(u) = \varphi(u)$

et φ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

On en déduit que $\Phi_{f,t}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$

avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi^{(k)}_{f,t}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_t(u) f^{(k)}(x-u) \, du$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi^{(k)}_{f,t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) f^{(k)}(y) \, dy$$

le résultat à l'ordre k, résulte alors immédiatement du résultat obtenu pour $k = 0$.