Polytechnique Mathématiques I MP 1999

Première partie

1) Le changement de variable $x = yz$ donne

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\,dz}{\pi y^2(1+z^2)} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan z\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

2) $$\partial_1 K(x,y) = -\frac{1}{\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \partial_2 K(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_1^2 K(x,y) = \frac{2y(3x^2-y^2)}{\pi(x^2+y^2)^3} \qquad \partial_2^2 K(x,y) = \frac{-2y(3x^2-y^2)}{\pi(x^2+y^2)^3}$$

Il en résulte $\partial_1^2 K + \partial_2^2 K = 0$

(Culture $\partial_1^2 + \partial_2^2 = \Delta$: laplacien $\Delta K = 0$ on dit que K est harmonique)

3) On raisonne par récurrence sur $m+n$, en remarquant d'abord que K étant une fraction rationnelle définie sur Π_+ elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en particulier $\partial_1^m \partial_2^n K$ est bien définie

et $\partial_1^{m+1}\partial_2^n K = \partial_1 \partial_1^m \partial_2^n K$

et $\partial_1^m \partial_2^{n+1} K = \partial_2 \partial_1^m \partial_2^n K$ (théorème de Schwarz)

On a bien $\partial_1^0 \partial_2^0 K(x,y) = \dfrac{P_{0,0}(x,y)}{(x^2+y^2)^{0+0+1}}$ avec $P_{0,0}(x,y) = 1$

On suppose $\left(\partial_1^n \partial_2^m K\right)(x,y) = \dfrac{P_{n,m}(x,y)}{(x^2+y^2)^{m+n+1}}$ alors

$\left(\partial_1^{n+1}\partial_2^m K\right)(x,y) = \dfrac{P_{n+1,m}(x,y)}{(x^2+y^2)^{m+n+1}}$ avec

$$P_{n+1,m}(x,y) = (x^2+y^2)\,\partial_1 P_{n,m}(x,y) - 2(n+m+1)x\,P_{n,m}(x,y)$$

$P_{n+1,m}(x,y)$ est bien un polynôme en x et y de plus

$$\deg_x P_{n+1,m}(x,y) \leq 1 + \deg_x P_{n,m}(x,y)$$

$$\deg_y P_{n+1,m}(x,y) \leq 2 + \deg_y P_{n,m}(x,y).$$

~~Puisque~~ ~~par~~ $\deg_x P_{n+1,m}(x,y) \leq 2(m+n+1)$ si

$\deg_x P_{n,m}(x,y) \leq 2(m+n)$ et de même

$\deg_y P_{n+1,m}(x,y) \leq 2(m+n+1)$ si $\deg_y P_{n,m} \leq 2(n+m)$.

On aura, de manière similaire

$$P_{n,m+1} = (x^2+y^2)\,\partial_2 P_{n,m}(x,y) - 2(n+m+1)\,y\,P_{n,m}(x,y)$$

et des résultats similaires sur les degrés.

On a donc prouvé par récurrence, sur $n+m$:

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad \partial_1^n \partial_2^m k(x,y) = \frac{P_{n,m}(x,y)}{(x^2+y^2)^{n+m+1}}$$

où $P_{n,m}(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ avec

$$\deg_x P_{n,m}(x,y) \leq 2(m+n)$$

$$\deg_y P_{n,m}(x,y) \leq 2(m+n)$$

c'est à dire

$$P_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^{2(m+n)} \sum_{j=0}^{2(m+n)} a_{m,n,i,j}\, x^i y^j$$

où les $a_{m,n,i,j}$ sont réels (et même dans $\mathbb{Z}$!)

Deuxième partie

4) $\forall (x,y) \in \Pi_+$ $\varphi_{x,y} : t \mapsto f(t)\, K(x-t, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $\forall t \in \mathbb{R}$ $|\varphi_{x,y}(t)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty\, y}{\pi((x-t)^2+y^2)}$ donc

$\varphi_{x,y}(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ et $-\infty$ or

$t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$

donc $\varphi_{x,y}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

5.a) $\forall (x,y) \in \Pi_+$ $\Phi_f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(t)\, y\, dt}{(x-t)^2+y^2}$

le changement de variable $t = x + uy$ donne.

$\forall (x,y) \in \Pi_+$ $\Phi_f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(x+uy)}{1+u^2}\, du.$

Soit $h : \Pi_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$((x,y), u) \longmapsto \dfrac{f(x+uy)}{1+u^2}$

- $\forall (x,y) \in \Pi^+$ $u \mapsto h((x,y), u)$ est continue (par morceaux)
- $\forall u \in \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto h((x,y), u)$ est continue
- $\forall (x,y) \in \Pi^+$ $\forall u \in \mathbb{R}$ $|h((x,y), u)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{\pi(1+u^2)} = \varphi(u)$

φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte que Φ_f est définie et continue sur Π_+

De plus $\forall (x,y) \in \Pi_+$ $|\Phi_f(x,y)| \leq \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\|f\|_\infty}{1+u^2}\, du = \|f\|_\infty.$

5b) $\Phi : f \to \Phi_f$ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

De plus on a vu à la question précédente que Φ_f est bornée avec $\|\Phi(f)\|_{\infty,\Pi_+} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{R}}$ (*)

donc Φ est continue

(Hors programme : $|||\Phi||| \leq 1$ d'après (*) et de plus pour $f = 1$ $\|\Phi(f)\|_{\infty,\Pi_+} = 1 = \|f\|_{\infty,\mathbb{R}}$ donc $|||\Phi||| = 1$)

6) On va restreindre, un peu le résultat demandé et montrer seulement que $\partial_1^2 \Phi_f$ existe et est continue sur Π_+. Cette démonstration contient tous les arguments qui permettrait de montrer par récurrence sur l'ordre de la dérivée partielle considérée que toutes les dérivées partielles de Φ_f existent et sont continues sur Π_+. Ceci est la caractérisation d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On utilise les résultats de la ~~questi~~ partie 1.

$$\partial_1 K(x,y) = \frac{P_{1,0}(x,y)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \deg_x P_{1,0}(x,y) \leq 2 \qquad \deg_y P_{1,0}(x,y) \leq 2$$

$$\partial_1^2 K(x,y) = \frac{P_{2,0}(x,y)}{(x^2+y^2)^3} \qquad \deg_x P_{2,0}(x,y) \leq 4 \qquad \deg_y P_{2,0}(x,y) \leq 4$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Pi_+$.

On a $\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ $\quad \Phi_f((x, y)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y_0^2} dt$

Soit $\left| \begin{array}{l} h_{y_0} :]x_0 - 1, x_0 + 1[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad (x, t) \longmapsto \frac{f(t)}{\pi((x-t)^2 + y_0^2)} \end{array} \right.$

+ $\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ $\quad t \mapsto h_{y_0}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
(question 4)

+ $\forall (x, t) \in]x_0 - 1, x_0 + 1[\times \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial h_{y_0}}{\partial x}(x, t)$ existe et vaut

$$\frac{P_{1,0}((x-t), y_0)}{((x-t)^2 + y_0^2)^2}$$

$\deg_x P_{1,0}(x, y_0) \leq 2$ donc $\deg_t P_{1,0}((x-t), y_0) \leq 2$

donc $\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ $\quad t \mapsto \frac{\partial h_{y_0}}{\partial x}(x, t)$ est continue

par morceaux et intégrable car $\frac{\partial h_{y_0}}{\partial x}(x, t) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

+ $\forall (x, t) \in]x_0 - 1, x_0 + 1[\times \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^2 h_{y_0}}{\partial x^2}(x, t)$ existe et vaut

$$\frac{P_{2,0}((x-t), y_0)}{((x-t)^2 + y_0^2)^3}$$ avec $\deg_t P_{2,0}((x-t), y_0) \leq 4$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{\partial^2 h_{y_0}}{\partial x^2}(x, t)$ est continue.
- $\forall x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ $\quad t \mapsto \frac{\partial^2 h_{y_0}}{\partial x^2}(x, t)$ est continue

par morceaux.

- Il reste le problème de la domination.

- $\forall x \in]x_0-1, x_0+1[\quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\left| P_{2,0}(x-t, y_0) \right| \leq \sum_{i=0}^{4} |a_i| \left(|x_0|+1+|t|\right)^i = Q(|t|)$$

- $\forall x \in]x_0-1, x_0+1[$.

$$\forall t \geq x_0+1 \qquad \frac{1}{(x-t)^2+y_0^2} \leq \frac{1}{\left((t-(x_0+1))^2+y_0^2\right)}$$

$$\forall t \in]x_0-1, x_0+1[\qquad \frac{1}{(x-t)^2+y_0^2} \leq \frac{1}{y_0^2}$$

$$\forall t \leq x_0-1 \qquad \frac{1}{(x-t)^2+y_0^2} \leq \frac{1}{\left(t-(x_0-1)\right)^2+y_0^2)}$$

On en déduit.

$\forall x \in]x_0-1, x_0+1[\quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^2 h_{y_0}(x,t)}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq \psi(t) \quad \text{avec}$$

$$\psi(t) = \frac{Q(|t|)}{\left((t-(x_0+1))^2+y_0^2\right)^3} \quad \text{si } t \geq x_0+1$$

$$= \frac{Q(|t|)}{y_0^6} \quad \text{si } t \in]x_0-1, x_0+1[$$

$$= \frac{Q(|t|)}{\left((t-(x_0-1))^2+y_0^2\right)^3} \quad \text{si } t \in]x_0-1, x_0+1[.$$

ψ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable car $\psi(t) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

<u>On peut donc affirmer</u>

<u>$\forall y_0 \in \mathbb{R}^{*+} \; \forall x \in]x_0-1, x_0+1[\quad \dfrac{\partial^2 \Phi_1(x, y_0)}{\partial x^2}$ existe</u>

Donc $\dfrac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x^2}$ est définie sur Π_+ et de plus

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x^2}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\,\frac{P_{2,0}(x-t,y)}{\left((x-t)^2+y^2\right)^3}}_{g((x,y),\,t)}\,dt}$$

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto g((x,y),t)$ est continue (par morceaux)
- $\forall (x,y) \in \Pi_+$ $t \longmapsto g((x,y),t)$ est continue
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall (x,y) \in [-A,A]\times[a,b] \subset \Pi_+$

$$|g((x,y),t)| \leq \Psi_{A,a,b}(t) \quad \text{avec}$$

$$\Psi_{A,a,b}(t) = \frac{\|f\|_\infty\, |P_{2,0}|\,(|t|+A,\, b)}{\left(\left(\max(0,|t|-A)\right)^2 + a^2\right)^3}$$

où $|P|(x,y)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant les coefficients de P par leurs modules.

$\Psi_{A,a,b}$ est continue et $\Psi_{A,a,b}(t) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc $\Psi_{A,a,b}$ est intégrable.

Finalement $\underline{\partial_1^2 \Phi_f \text{ est bien définie et continue sur } \Pi_+}$

En faisant de même avec $\partial_2^2 \Phi_f$ on obtient

$$\partial_1^2 \Phi_f + \partial_2^2 \Phi_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\partial_1^2 K + \partial_2^2 K\right)(x-t,y)\,dt = 0.$$

7) On a vu que $\partial_1 \Phi_f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)(-2(x-t)y)}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt$

et $\partial_2 \Phi_f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)((x-t)^2-y^2)}{((x-t)^2+y^2)^2}\,dt$

Soit $(x,y) \in \Pi_+$ avec $y \geq a$.

$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad |2\alpha\beta| \leq \alpha^2+\beta^2 \quad (\text{car } (|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0)$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \dfrac{|2(x-t)y|}{(x-t)^2+y^2} \leq 1$ et par conséquent

$$|\partial_1 \Phi_f(x,y)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{(x-t)^2+y^2}\,dt \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\|f\|_\infty}{(x-t)^2+a^2}\,dt$$

$\forall (x,y) \in \Pi_+$ avec $y \geq a \quad |\partial_1 \Phi_f(x,y)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{a}$

De même en utilisant $|(x-t)^2-y^2| \leq (x-t)^2+y^2$ on aura

$\forall (x,y) \in \Pi_+$ avec $y \geq a \quad |\partial_2 \Phi_f(x,y)| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{a}$

Ensuite $\forall ((x,y),(x',y')) \in \Pi_+ \cap \{(x,y), y \geq a\}$

$$|\Phi_f(x,y) - \Phi_f(x',y')| \leq |\Phi_f(x,y) - \Phi_f(x',y)| + |\Phi_f(x',y) - \Phi_f(x',y')|$$

$$\leq |x-x'| \sup_{z\in[x,x']} |\partial_1 \Phi_f(z,y)| + |y-y'| \sup_{z\in[y,y']} |\partial_2 \Phi_f(x',z)|$$

$$|\Phi_f(x,y) - \Phi_f(x',y')| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{a} \sup(|x-x'|, |y-y'|)$$

Φ_f est $\dfrac{2\|f\|_\infty}{a}$-lipschitzienne sur $\Pi_+ \cap \{(x,y), y \geq a\}$

donc uniformément continue.

8) On a vu à la question 4 $\forall (x,y) \in \Pi_+$ $\Phi_f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+uy)}{1+u^2}\,du$

le même argument qui a permis alors de prouver la continuité de Φ_f montre que le membre de droite définit une fonction $\overline{\Phi}_f$ continue sur $\overline{\Pi_+}$.

De plus $\overline{\Phi}_f(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+u^2}\,du = f(x)$

le résultat demandé n'est rien d'autre que l'expression de la continuité de $\overline{\Phi}_f$ en $(x_0,0)$, qui implique l'existence de $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in\Pi_+}} \Phi_f(x,y)$ car $(x_0,0)\in\overline{\Pi}_+$ (ici le $\overline{\ }$ désigne l'adhérence de Π_+, qui est bien égale au $\overline{\Pi}_+$ de l'énoncé)

9.a) et 9b). Si on montre que $\overline{\Phi}_f$ est uniformément continue, on obtient directement le 9.a) car.

$(|x-x_0|\leq \eta \quad y\leq\eta$ et $(x,y)\in\Pi_+) \Leftrightarrow (x,y)\in\Pi_+$ et $\|(x,y)-(x_0,0)\|<\eta)$

avec de plus $\Phi_f(x,y) = \overline{\Phi}_f(x,y)$ et $f(x_0) = \overline{\Phi}_f(x_0,0)$.

Etablissons donc le 9b)

Il s'agit de prouver

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \eta>0 \quad \|(x,y)-(x',y')\| = \sup(|x-x'|,|y-y'|) < \eta \Rightarrow |\overline{\Phi}_f(x,y) - \overline{\Phi}_f(x',y')| < \varepsilon$

or

$$|\overline{\Phi}_f(x,y) - \overline{\Phi}_f(x',y')| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{(1+u^2)}\,du$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{\pi(1+u^2)}\,du < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{-A} \frac{2\|f\|_\infty}{\pi(1+u^2)}\,du < \frac{\varepsilon}{4}$$

On en déduit, en fixant un tel A :

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in \overline{\Pi}_+^2 \quad \int_{-\infty}^{-A} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{\pi(1+u^2)}\,du + \int_A^{+\infty} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{\pi(1+u^2)}\,du < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, f est uniformément continue, donc il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \quad |X-Y| < \eta_1 \Rightarrow |f(X)-f(Y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

On en déduit

$$\|(x,y)-(x',y')\| < \eta = \frac{\eta_1}{A+1} \Rightarrow |(x+uy)-(x'+uy')| < \eta \quad \text{pour tout } u \text{ de } [-A,A]$$

$$\quad\quad \Rightarrow |f(x+uy)-f(x'+uy')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{''}$$

$$\quad\quad \Rightarrow \int_{-A}^{A} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{\pi(1+u^2)}\,du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}\frac{du}{1+u^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|(x,y)-(x',y')\| < \eta \Rightarrow \int_{-A}^{A} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{\pi(1+u^2)}\,du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En écrivant $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots = \int_{-\infty}^{-A} \cdots + \int_{-A}^{A} \cdots + \int_A^{+\infty} \cdots$ on obtient

$$\|(x,y)-(x',y')\| < \eta \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x+uy)-f(x'+uy')|}{\pi(1+u^2)}\,du < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $\eta > 0$ tel que

$$\|(x,y)-(x',y')\| < \eta \quad (x,y) \in \overline{\Pi}_+ \quad (x',y') \in \overline{\Pi}_+ \Rightarrow |\Phi_f(x,y) - \Phi_f(x',y')| < \varepsilon$$

ce qui exprime bien que Φ_f est uniformément continue sur $\overline{\Pi}_+$