Devoir en temps libre 6, pour le 16/11/2016
Suites récurrentes, fractions rationnelles et nombres de Pisot

Le but de ce problème est de montrer que la convergence de la série S_θ de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$, défini par la relation $u_n(\theta) = |\sin(\theta^n\pi)|$, où θ est un nombre réel donné, est liée à des propriétés algébriques du réel θ.

Quelques notations et définitions sont nécessaires :

- Dans tout le problème la lettre $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, soit celui des réels $\mathbb{R}$, soit celui des complexes $\mathbb{C}$. Une suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$, dont tous les éléments c_i, $i \in \mathbb{N}$, appartiennent au corps $\mathbb{K}$, est dite appartenir à $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
- Une suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dite pseudo-périodique dans $\mathbb{K}$, si et seulement si elle appartient à $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ et s'il existe p éléments de $\mathbb{K}$, λ_1, λ_2,..., λ_p ($p > 0$) tels que la propriété ci-dessous soit vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq p \quad c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j} = \lambda_1 c_{n-1} + \lambda_2 c_{n-2} + \cdots + \lambda_p c_{n-p}.$$

- Une fraction rationnelle appartenant au corps $\mathbb{K}(X)$ est dite bf régulière si 0 n'en est pas un pôle.

La première partie étudie les suites pseudo-périodiques et établit le lien entre les séries entières définies à partir d'une suite pseudo-périodique et les fraction rationnelles régulières. La seconde partie énonce des conditions suffisantes et une condition nécessaire pour que la série de terme général $u_n(\theta)$ soit convergente.

Première partie

1) Caractérisation des suites pseudo-périodiques.

Associons à une suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ quelconque, appartenant à $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, et à un entier naturel n le déterminant Δ_n défini par la relation suivante :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}.$$

a) Démontrer que pour que la suite C soit nulle (i.e. tous les termes c_i sont nuls), il faut et il suffit que le déterminant Δ_n soit nul pour touts les valeurs de l'entier naturel n.

b) Démontrer que si la suite C est pseudo-périodique, les déterminant Δ_n, associés à cette suite, sont nuls à partir d'un certain rang.

c) Soit trois entiers fixés p,m et n vérifiant les inégalités : $1 \leq p \leq m + 1$, $2m + 2 \leq n$.
Soit une suite C de $\mathbb{K}^n$ possédant la propriété : il existe p éléments de $\mathbb{K}$, λ_1, λ_2,..., λ_p ($p > 0$) tels que, pour tout entier k compris entre $m + 1$ et $n - 1$ ($m + 1 \leq k \leq n - 1$) :

$$c_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{k-j} = \lambda_1 c_{k-1} + \lambda_2 c_{k-2} + \cdots + \lambda_p c_{k-p}.$$

Déterminer, au signe près, l'expression du déterminant Δ_{n-m-1} en fonction du déterminant Δ_m et de la quantité $a = c_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j}$.
En déduire que si le déterminant Δ_m n'est pas nul et si le déterminant Δ_{n-m-1} est nul il vient $c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j}$.

d) Démontrer que pour que la suite $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit pseudo-périodique dans $\mathbb{K}$, il faut et il suffit qu'il existe un entier q, $(q \geq 0)$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à q, le déterminant Δ_n soit nul.

2) Développement en série entière d'une fraction rationnelle régulière.

Soit f une fraction rationnelle régulière appartenant à $\mathbb{K}(X)$; désignons par P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}(X)$ premiers entre eux, avec $Q(0) \neq 0$, tels que cette fraction rationnelle f soit égale à $\frac{P}{Q}$.

a) Démontrer que cette fraction rationnelle est développable en série entière dans un voisinage de l'origine. Soit $c_n x^n$, $n \geq 0$, le terme général de la série entière obtenue. Déterminer le rayon de convergence R ; démontrer que les coefficients c_n, $n \geq 0$, appartiennent au corps $\mathbb{K}$.
Indication : Cette question est difficile. Lorsqu'elle est apparaît dans des sujets plus récents, ce qu'elle fait régulièrement, elle est décomposée en plusieurs questions. Ici, puisqu'on ne demande que l'existence du développement en série entière, un plan d'attaque pourrait être :
— Factoriser Q dans $\mathbb{C}[X]$.
— Développer en série entière $\frac{1}{x-\alpha}$ si α est un complexe non nul, en précisant le rayon de convergence.
— En utilisant le produit de Cauchy, en déduire que f est développable en série entière, et donner une minoration du rayon de convergence.
— Montrer que f ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur un disque de rayon strictement supérieur à $\min\{|\alpha|, Q(\alpha) = 0$, en examinant le comportement de f au voisinage d'un pôle.
— En déduire le rayon de convergence.
— Pour montrer que les c_n sont dans $\mathbb{K}$ les relier à f.

b) Démontrer que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est une suite pseudo-périodique dans $\mathbb{K}$.

3) Fraction régulière associée à une suite pseudo-périodique.

Soit $(c_i)_{i\geq 0}$ une suite pseudo-périodique dans $\mathbb{K}$. Par hypothèse, il existe p éléments de $\mathbb{K}$, λ_1, λ_2,..., λ_p $(p > 0)$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq p \quad c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j}.$$

a) Démontrer l'existence d'un réel A_0, supérieur ou égal à 1, tel que pour tout réel A supérieur ou égal à A :

$$\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| A^{p-j} \leq A^p.$$

b) En déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout entier naturel n : $|c_n| \leq M^{n+1}$.

c) Démontrer que la série entière de terme général $c_n x^n$, $n \geq 0$, a un rayon de convergence R strictement positif. Soit S la fonction définie, dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$, par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Démotrer qu'il existe une fraction régulière f unique appartenant à $\mathbb{K}(X)$ telle que $f(x)$ soit égal à $S(x)$ si x appartient à $]-R, R[$.

4) Fraction rationnelles régulières dont les les coefficients sont des entiers relatifs.

a) Soit f une fraction rationnelle régulière ; supposons qu'elle soit égale à $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes, premiers entre eux, dont les coefficients sont des entiers relatifs, avec $Q(0) = 1$. Démontrer que tous les coefficients de f sont des entiers relatifs.

b) Exemples : Etant donnés deux entiers relatifs c_0 et c_1, soit $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers relatifs définis par ces deux premiers entiers et la relation de récurrence $c_n = 5c_{n-1} - 6c_{n-2}$, pour $n \geq 2$.

Déterminer la fraction régulière $f = \frac{P}{Q}$ dont le développement en série entière dans un voisinage de 0 est la série de terme général $c_n x^n$, $n \geq 0$.

Il sera admis dans la suite que si f est une fraction rationnelle régulière dont les coefficients c_n, $n \geq 0$, sont des entiers relatifs, il existe deux polynômes P et Q dont les coefficients sont des entiers relatifs, avec $Q(0) = 1$, tels que la fraction f soit égale à $\frac{P}{Q}$.

Deuxième partie

Après avoir démontré des conditions suffisantes de la convergence de la série S_θ, les inégalités de Hadamard permettent d'en donner une condition nécessaire.

5) Soit θ un nombre réel de valeur absolue inférieure ou égale à 1 ; démontrer que la série de terme général $u_n(\theta) = |\sin(\theta^n \pi)|$, $n \geq 0$, est convergente.

6) Supposons que P soit un polynôme tel que : son degré N est un entier supérieur ou égal à 2, ses coefficients sont des entiers relatifs, le terme constant est 1 et ses racines complexes r_1, r_2,..., r_N sont deux à deux distinctes. Soit n un entier naturel quelconque différent de 0.

a) Soit S_n le nombre complexe :

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{r_k^n}.$$

En considérant, par exemple, la fraction rationnelle $R = \frac{P'}{P}$ (P' est le polynôme dérivé de P), démontrez que S_n est un entier relatif.

b) Soit θ un nombre réel de valeur absolue strictement supérieure à 1. Supposons que le réel $r_1 = \frac{1}{\theta}$ soit racine de P et que les $N-1$ autres racines de P aient un module strictement supérieur à 1.

Démontrer que le réel θ^n s'écrit $\theta^n = S_n + \epsilon_n$, où S_n est un entier relatif et ϵ_n le terme général d'une suite tendant vers 0.

En déduire que la série de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$ est convergente.

7) Inégalités de Hadamard.

Considérons un espace euclidien E de dimension n ; désignons par $(.|.)$ et $\|.\|$ le produit scalaire et la norme associée. Soit $\mathcal{B}$ une base orthomnormale de E. Pour tout suite $(x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E, désignons par $\det(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de ces n vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

a) Les n vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ sont supposés indépendants ; soit $(z_1, \ldots, z_n)$ la suite orthormale obtenue à partir de $(x_1, \ldots, x_n)$ par la méthode de Schmidt. Etablir l'égalité :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(z_1, \ldots, z_n) \prod_{k=1}^{n} (x_k|z_k).$$

b) En déduire pour toute suite $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, l'inégalité :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

8) Condition nécessaire de convergence.

Supposons qu'il exite un réel θ de valeur absolue strictement supérieure à 1 tel que la série de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$, soit convergente. Pour tout entier naturel n, posons $\theta^n = c_n + \epsilon_n$, où c_n est un entier relatif et ϵ_n un réel vérifiant l'encadrement $-\frac{1}{2} < \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$.

Considérons les trois séries entières (U), (V) et (W) de termes généraux : $c_n x^n$, $\epsilon_n x^n$, $\theta^n x^n$.

Désignons, lorsqu'il y a convergence, par $U(x)$, $V(x)$ et $W(x)$ respectivement la somme de chacune de ces séries :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n x^n, \quad W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n x^n.$$

Soit respectivement R_U, R_V et $R8W$ les rayons de convergence de chacune de ces séries.

a) Déterminer les rayons de convergence R_W et R_U. Etablir l'inégalité $R_V \geq 1$.

b) Démontrer que la série de terme général $d_n = c_n - \theta c_{n-1}$, $n \geq 1$, est convergente ainsi que celle de terme d_n^2, $n \geq 1$.

Pour tout entier k, $k \geq 1$ posons : $P_k = \sum_{n=k}^{+\infty} d_n^2$.

c) Soit Δ_n le déterminant associé à la suite $(c_i)_{i\geq 0}$ et à un entier naturel n (question 1).
Démontrer l'existence d'une constante K telle que, pour tout entier n :

$$(\Delta_n)^2 \leq K\theta^{2n} \prod_{k=1}^{n} P_k.$$

En déduire que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, lorsque n croît indéfiniment, puis que le réel Δ_n est nul à partir d'un certain rang.

d) Démontrer qe la série entière de terme général $\epsilon_n x^n$, $n \geq 0$, est le développement en série entière d'une fraction rationnelle. Démontrer que son rayon de convergence R_V est strictement supérieur à 1.

e) En déduire que le réel $\frac{1}{\theta}$ est l'unique racine dans le disque unité fermé d'un polynôme Q dont les coefficients sont entiers.