Devoir en temps libre 5, pour le 03/11/2016
Séries de fonctions

Exercice 1:
1) Montrer que
$$x \mapsto \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - n^2}$$
définit une fonction f sur $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Montrer que
$$f(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x-k}.$$
4) En déduire que f est 1-périodique.
5) Montrer de même que f vérifie
$$(E) \qquad \forall x \in D \qquad f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2f(x).$$
6) Montrer qu'au voisinage de 0 on peut écrire $f(x) = \frac{1}{x} + xg(x)$ où g est une fonction continue sur $]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$.
7) Préciser la valeur de $g(0)$ sous la forme d'une série.
8) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$ est 1-périodique sur D et vérifie l'équation (E).
9) Montrer qu'au voisinage de 0 on peut écrire
$$h(x) = \frac{1}{x} + ax + \circ(x).$$
10) En déduire que $f - h$ peut être prolongée en une fonction continue F continue sur $\mathbb{R}$, et vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi que $F(0) = 0$.
11) Montrer qu'une telle fonction est nécessairement nulle.
Indication : Considérer $M = \max_{[0,1]} F$. Si $M > 0$, montrer qu'il existe un x_0 minimal dans $[0, 1]$ tel que $F(x_0) = M$. En appliquant (E) en x_0 aboutir à un contradiction.
12) En déduire $f = h$ et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
13) Montrer que $\forall x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[\quad \sin \pi x = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2})$.
Indication : Ecrire
$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2}}.$$
Prouver (par périodicité) que cette formule est vraie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2: *Transformation d'Abel et séries de fonctions*

1) *Question indépendante de ce qui suit, servant d'échauffement dans l'usage de la transformation d'Abel.*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série convergente de nombres réels et (λ_n) une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

En déduire que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, vérifiant $\alpha_n = \mathcal{O}(n^a)$ pour un a réel, la fonction de la variable réelle

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^x}$$

est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non majoré et est continue sur son domaine de définition. (Culture : une telle série s'appelle une série de Dirichlet.)

* * * * * * *

Soit (a_n) une suite décroissante et tendant vers zéro.

2) Si θ est un nombre réel, calculer

$$C_n(|theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \text{ et } S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta.$$

3) Justifier

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

4) En utilisant une transformation d'Abel, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$ si $0 < \alpha < \pi$.

5) (*moins facile*) En minorant $\sum_{k=E(n/2)}^{n} a_k \sin(k\frac{\pi}{2n})$, montrer que si la série converge uniformément sur $[0, \pi]$ alors $(na_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

6) (*encore moins facile*) Etablir la réciproque : si $(na_n)_{n\geq 1}$ tend vers zéro alors $\sum_{n\geq 0} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

Indication : Pour majorer $|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx|$, $x \in]0, \pi]$, à l'aide de $\alpha_n = \sup_{k\geq n} ka_k$, couper la somme en deux, à l'indice r. Majorer la première somme en utilisant $|\sin x| \leq |x|$, et la seconde en utilisant la transformation d'Abel. Choisir ensuite r en fonction de x pour que les deux majorants soient à-peu-près égaux.