Devoir en temps libre 5

Exercice 2

1) La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente. On peut donc définir la suite $(R_n)_{n\geq 0}$ en posant $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

- La suite $(R_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 elle est donc bornée.

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n| \leq M$$

- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = R_n - R_{n+1}$

- $\forall x \in [0,+\infty[\quad \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=0}^{N} (R_n - R_{n+1}) e^{-\lambda_n x}$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=0}^{N} R_n e^{-\lambda_n x} - \sum_{n=0}^{N} R_{n+1} e^{-\lambda_n x}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} R_n e^{-\lambda_n x} - \sum_{n=1}^{N+1} R_n e^{-\lambda_{n-1} x}$$

$$\underline{\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x} = R_0 e^{-\lambda_0 x} + \sum_{n=1}^{N} R_n (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n-1} x}) - R_{N+1} e^{-\lambda_N x}}$$

- Or $\lim_{N\to+\infty} R_{N+1} e^{-\lambda_N x} = 0$ ~~car, à la fois, lim~~

car $|e^{-\lambda_N x}| = e^{-\lambda_N x} \leq 1$ et $\lim_{N\to+\infty} R_{N+1} = 0$

Et $\forall n \geq 1 \quad |R_n(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n-1} x})| = (e^{-\lambda_{n-1} x} - e^{-\lambda_n x})|R_n|$ (*)

$$\leq (e^{-\lambda_{n-1} x} - e^{-\lambda_n x}) M$$

Or la suite $\underline{(e^{-\lambda_n x} M)_{n\geq 0}}$ converge (vers 0, ou M si x=0) (**)

Donc $\underline{\sum_{n\geq 1} R_n (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n-1} x})}$ converge absolument, et par conséquent converge.

(*) Car (λ_n) est croissante (**) car $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$

Il résulte de tout ceci que la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge

De plus $\forall x \in [0, +\infty[$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} R_n (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n-1} x}) \right) + R_0 e^{-\lambda_0 x}$

le même calcul initié à partir du rang $(n+1)$ donne

$$\sum_{k=(n+1)}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = R_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} x} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} R_k (e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k-1} x})$$

la série du membre de droite convergeant absolument.

On en déduit

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq |R_{n+1}| + \sum_{k=n+2}^{+\infty} |R_k| (e^{-\lambda_{k-1} x} - e^{-\lambda_k x})$$

pour $x = 0$ $\quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \right| = |R_{n+1}|$

pour $x > 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} e^{-\lambda_n x} = 0$

et $\quad \forall k \geq n+2 \quad |R_k| \leq \sup_{k \geq n+1} |R_k|$

donc $\quad \forall x > 0 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq |R_{n+1}| + \sup_{k \geq n+1} |R_k| \left(e^{-\lambda_{n+1} x} - 0 \right)$

$$\forall x > 0 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq 2 \sup_{k \geq n+1} |R_k|$$

(vrai aussi pour $x = 0$)

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq 2 \sup_{k \geq n+1} |R_k|$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0, +\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| = 0$$

la série converge bien uniformément sur $[0, +\infty[$.

Soit (α_n) une suite de réel et D l'ensemble des x telque $\sum_{r\geq 0} \alpha_r e^{-\lambda_n x}$ converge. ③

Supposons que D ne soit pas vide, soit x_0 dans D, alors $\sum_{r\geq 0} \alpha_r e^{-\lambda_r x_0}$ converge.

Posons $a_r = \alpha_r e^{-\lambda_n x_0}$. Alors $\forall x \geq x_0$ $\alpha_r e^{-\lambda_n x} = a_r e^{-\lambda_r (x-x_0)}$

Or $f_{x_0} : y \mapsto \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$,

donc $f : x \mapsto \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_r e^{-\lambda_r x} = f_{x_0}(x-x_0)$ est définie et continue sur $[x_0, +\infty[$.

On en déduit que D est un intervalle non borné et que f est continue sur D.

En effet $x_0 \in D$ et $x \geq x_0 \Rightarrow x \in D$ donc D est un intervalle non borné

- Si $D = [x_0, +\infty[$ alors f est continue sur D.

Si $D =]x_0, +\infty[$ alors f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > x_0$ donc sur D.

Si $\alpha_r = O(n^\alpha)$, alors d'après la règle de Riemann $\sum \frac{\alpha_n}{n^x}$ converge (absolument) pour $x > \alpha + 1$, donc D est non vide. (ici $\lambda_r = \ln n$)

- Si $\sum \frac{\alpha_n}{n^x}$ converge alors $\alpha_r = o(n^x)$, donc si D est non vide : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha_r = O(n^\alpha)$.

En conclusion pour $\lambda_r = \ln n$ D est non vide ssi $\alpha_n = O(n^\alpha)$ pour un α réel.

2) $C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$

On en déduit.

Si $e^{i\theta} \neq 1$ $\quad C_n(\theta) = \frac{1}{2} \frac{e^{-in\theta}\left(1 - e^{i(2n+1)\theta}\right)}{1 - e^{i\theta}}$

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{+\frac{i\theta}{2}}}$$

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Si $e^{i\theta} = 1$ $\quad C_n(\theta) = n + \frac{1}{2}$.

$S_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$ $\quad$ (si $e^{i\theta} \neq 1$)

Si $e^{i\theta} \neq 1$ $\quad S_n(\theta) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-\frac{in\theta}{2}} - e^{\frac{in\theta}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)$

$$S_n(\theta) = \sin\frac{(n+1)\theta}{2} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Si $e^{i\theta} = 1$ $\quad S_n(\theta) = 0$.

3) $\sin'' = -\sin$ donc $\sin''$ est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\sin_{|[0,\frac{\pi}{2}]}$ est concave.

le graphe de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est au dessus de sa corde $[(0, \sin 0), (\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2} = 1)]$ d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$, et en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

D'où les inégalités.

(On pouvait aussi étudier les fonctions $x \mapsto x - \sin x$ et $x \mapsto \sin x - \frac{2}{\pi}x$, mais c'était plus long)

4) On a $\forall n \geq 0 \quad \sin nx = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, avec la convention $S_{-1}(x) = 0$

Donc
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k S_{k-1}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} S_k(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k(x)$$

$$\underline{\sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx = a_n S_n(x) + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k(x)}$$

$\forall x \in [\alpha, \pi] \quad S_n(x) = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \dfrac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ car $e^{ix} \neq 1$

$\forall x \in [\alpha, \pi] \quad |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ car $\frac{x}{2} \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\underline{\forall x \in [\alpha, \pi] \quad |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}}$ car sin est croissante sur $\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement positive.

On en déduit

1) $\forall x \in [\alpha, \pi] \quad |a_n S_n(x)| \leq \dfrac{a_n}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ (a_n est positive car elle tend vers 0 en décroissant)

$$\sup_{x \in [\alpha, \pi]} |a_n S_n(x)| \leq \frac{a_n}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [\alpha, \pi]} |a_n S_n(x)| = 0}$$

Donc $\underline{(a_n S_n)_{n \geq 0} \text{ tend uniformément vers } 0}$ sur $[\alpha, \pi]$.

2) $\forall x \in [\alpha, \pi]$ $|\underbrace{(a_k - a_{k+1}) S_k(x)}_{v_k(x)}| \leq (a_k - a_{k+1}) \times \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

(car (a_k) est décroissante)

Or $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1}) \times \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ converge car $\left(a_n \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)_{n\geq 0}$

converge. (Relation suite - série).

Donc $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge normalement donc uniformément

sur $[\alpha, \pi]$.

Il résulte de 1) et 2) que la suite de fonctions

$\left(x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément

sur $[\alpha, \pi]$.

5) Si $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ ($a_n \sin nx$ désigne $x \mapsto a_n \sin nx$)

converge uniformément sur $[0, \pi]$. alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin(kx)\right| = 0$$

(car $\sup \left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin kx\right| \leq \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{+\infty} a_k \sin kx\right| + \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right|$)

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{\pi}{2n} \in [0, \pi]$ donc

$$\left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin \frac{k\pi}{2n}\right| \leq \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin kx\right|$$

Donc si $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ converge uniformément

$$\lim_{n\to +\infty} \left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin\frac{k\pi}{2n}\right| = 0$$

Or $\forall k \in [E(\frac{n}{2}), n]$ $\frac{k\pi}{2n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin\frac{k\pi}{2n} \geq \frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{2n} \geq 0$

et

$$\left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin\frac{k\pi}{2n}\right| = \sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin\frac{k\pi}{2n} \geq \sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} \frac{k\, a_k}{n}$$

$$\geq \sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} \frac{k}{n} a_n$$ car $(a_k)_{k\geq 0}$ est décroissante

$$\geq \frac{n}{2} \times \frac{(n-1)}{2n} \times a_n$$ car $\frac{k}{n} \geq \frac{n-1}{2n}$

$$\left|\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} a_k \sin\frac{k\pi}{2n}\right| \geq \frac{(n-1)a_n}{4}.$$

On en déduit $\lim_{n\to +\infty} \frac{n-1}{4} a_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0$

(car $n\, a_n = \frac{4n}{n-1} \times \frac{n-1}{4} a_n$!).

6) Etablissons la réciproque.

On suppose que $(n\, a_n)_{n\geq 1}$ tend vers zéro.

$(a_n)_{n\geq 1}$ est toujours décroissante.

Il s'agit de majorer, pour x dans $[0, \pi]$.

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right|$$

Pour $x = 0$ $|R_n(x)| = 0$. On peut se limiter au cas où x appartient à $]0, \pi]$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=n+1}^{r} a_k \sin kx + \sum_{k=r+1}^{+\infty} a_k \sin kx$$

La technique employée à la question 1) pour majorer $\left|\sum_{k=r+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right|$ en appliquant la transformation d'Abel donne

$$\left|\sum_{k=r+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right| \le \cancel{\sup_{k\ge r+1} |a_k|} \; \frac{a_{r+1}}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{a_r}{\sin\frac{x}{2}}$$

D'autre part $\left|\sum_{k=n+1}^{r} a_k \sin kx\right| \le \sum_{k=n+1}^{r} a_k |\sin kx| \le x \sum_{k=n+1} k\, a_k$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{r} a_k \sin kx\right| \le x\,(r-(n+1)) \sup_{k\ge n+1} k\, a_k \le x(r-n)\alpha_{n+1}$$

En remarquant $a_r = \frac{r\, a_r}{r} \le \frac{\alpha_{n+1}}{r}$ on obtient en regroupant

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right| \le \left(x(r-n) + \frac{1}{r \sin\frac{x}{2}}\right)\alpha_{n+1}$$

Choisissons $r = E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + n$

Alors $(r-n)\,x \le x\,E\left(\frac{1}{x}\right) + x \le \pi + 1$

et $r \sin\frac{x}{2} \ge \frac{1}{x} \sin\frac{x}{2} \ge \frac{1}{x}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{\pi}$

donc

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right| \le (2\pi+1)\,\alpha_{n+1}$$

$$\sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right| \le (2\pi+1)\,\alpha_{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx\right| = 0$$

q.e.d.