Devoir en temps libre 5

Exercice 1

1) Posons pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans D : $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2-n^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ $\quad |u_n(x)| \sim \dfrac{|x|}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge absolument, donc converge, d'après le critère de Riemann.

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur D. Et puisque $u_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur D, f est définie sur D.

2) Soit $A>0$, $\forall n \geq \lceil A \rceil + 1$ $\forall x \in [-A, A]$ $|U_n(x)| \leq \dfrac{2A}{n^2-A^2}$ (car $|x^2-n^2| = n^2-x^2$).

Or $\displaystyle\sum_{n\geq \lceil A\rceil+1} \frac{2A}{n^2-A^2}$ converge (Riemann)

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq \lceil A\rceil+1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-A, A]$. Chaque u_n, $n \geq \lceil A \rceil + 1$, est continue sur $[-A, A]$. Donc $\displaystyle\sum_{n=\lceil A\rceil+1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[-A, A]$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\lceil A\rceil} u_n$ est continue sur D donc sur $D \cap [-A, A]$.

Finalement $\forall A>0$ f est continue sur $[-A, A] \cap D$, donc f est continue sur D.

3) Autre rédaction possible (Je rappelle que vous devez impérativement n'en retenir qu'une seule).
Soit $A \in]0, \frac{1}{2}[$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in [p+A, p+1-A]$ $|U_n(x)| \leq \dfrac{2(|n|+1)}{\min(|n^2-(p+A)^2|, |n^2-(p+1-A)^2|)}$
On obtient la convergence normale sur $[p+A, p+1-A]$ donc la continuité, puis la continuité sur $]p, p+1[$ pour tout p, donc sur D.
Mais la majoration n'était pas facile à obtenir.

3) $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2-n^2}$

Or $\underline{\frac{2x}{x^2-n^2} = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}}$, donc $\underline{f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x-n}}$

puis $\underline{f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-n}}$ (PS : $x \in D$)

4) $f(x+1) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1-n} = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-(n-1)}$

$\underline{f(x+1) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N-1}^{N-1} \frac{1}{x-n} = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} \right)}$

$\underline{f(x+1) = f(x) + 0 + 0 = f(x)}$ $(x \in D)$

5) le principe est le même. On remarque d'abord que si x appartient à D il en est de même de $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$.

$f\left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x}{2}-N} = \underline{2\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-2n} = f\left(\frac{x}{2}\right)}$

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x+1}{2}-N} = \underline{2\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x-(2n-1)} = f\left(\frac{x+1}{2}\right)}$

$\underline{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{p=-(2N+1)}^{2N} \frac{1}{x-p} = 2f(x)}$

(en écrivant $\sum_{p=-(2N+1)}^{(2N)} \frac{1}{x-p} = \sum_{p=-2N}^{2N} \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x+2N+1}$)

6) $\forall x \in \left]-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3}\right[- \{0\}$ $f(x) = \frac{1}{x} + x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{x^2-n^2}}_{g(x)}$

$\forall x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$ $\forall n \geq 1$ $\underline{\left|\frac{2}{x^2-n^2}\right| = \frac{2}{n^2-x^2} \leq \frac{2}{n^2-\frac{4}{9}} = \alpha_n}$

$\underline{\sum_{n\geq 1} \alpha_n \text{ converge}}$. Un argument de convergence normale déjà utilisé permet d'affirmer que $\underline{g \text{ est continue sur } \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[}$

7) $g(0) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

8) . $h(x) = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ Donc h est définie sur D.

. $h(x+1) = \pi \frac{-\cos \pi x}{-\sin \pi x} = h(x)$ h est 1-périodique.

. $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi x}{2}} \right)$

$$= \pi \left(-\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} + \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi x}{2}} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} \right)$$

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)}$$

$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2h(x)$ (Si $x \in D$)

9) Au voisinage de 0 $h(x) = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \pi \frac{\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + O(x^4)\right)}{\left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + O(x^5)\right)}$

$$h(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{2} x^2 + O(x^4)\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + O(x^4)\right)^{-1}$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{2} x^2 + O(x^4)\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{6} x^2 + O(x^4)\right)$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} x^2 + O(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3} x + o(x)$$

$a = -\frac{\pi^2}{3}$ $h(x) = \frac{1}{x} + ax + o(x)$

10) On a vu en 1 que $x \mapsto f(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue par exemple sur $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. La question précédente montre que $x \mapsto h(x) - \frac{1}{x}$ peut être prolongée en 0 en ~~une~~ fonction continue, en lui attribuant la valeur 0. Par soustraction $f - h$ peut être prolongée en une fonction continue sur $]-1, 1[$ valant 0 en 0

De plus puisque $f-h$ est 1-périodique, elle peut être prolongée en une fonction continue en tout n de $\mathbb{Z}$,

En conclusion. $f-h$ peut être prolongée en une fonction. F continue sur $\mathbb{R}$.

F vérifie toujours $F(x+1)=F(x)$
$F(\frac{x}{2})+F(\frac{x+1}{2})=2F(x)$

car D est dense dans $\mathbb{R}$ (On utilise le théorème de prolongement des égalités)

De plus $F(0)=0$

11) Soit $M=\max_{x\in[0,1]} F(x)$. Supposons $M>0$ et

soit $\mathcal{E}=\{x\in[0,1] \quad F(x)=M\}$ puisque F est continue

$\mathcal{E}$ est fermé, non vide et borné. Il possède donc un minimum x_0. $x_0>0$ car $F(0)\neq M$ et

$$F\left(\frac{x_0}{2}\right)+F\left(\frac{x_0+1}{2}\right)=2F(x_0)=2M$$

Or $F\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\leq M$ et $F\left(\frac{x_0}{2}\right)<M$ car $\frac{x_0}{2}<x_0$.

On obtient une contradiction.

Donc $M\leq 0$ or $F(0)=0$ donc $M=0$ et

$\forall x\in[0,1] \quad F(x)\leq 0$.

Or $-F$ vérifie les mêmes propriétés que F donc

$\forall x\in[0,1]. \quad -F(x)\geq 0$

et finalement

$\forall x\in[0,1] \quad F(x)=0$ et par périodicité $F=0$.

12) On en déduit $f = h$ et en identifiant les développements asymptotiques $a = -\frac{\pi^2}{3}$ et finalement $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

13) $\forall x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[- \{0\}$.

$$\pi(\cotan \pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, donc sur tout segment $[\min(\frac{1}{2}, x), \max(\frac{1}{2}, x)]$ contenu dans $]0, \frac{2}{3}]$.

On peut donc intégrer terme à terme entre x et $\frac{1}{2}$.

On obtient

$$\forall x \in]0, \frac{2}{3}] \quad \ln \sin \pi x - \ln x = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\forall x \in]0, \frac{2}{3}] \quad \ln \frac{\sin \pi x}{x} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

$$|v_n(x)| \leq -\ln\left(1 - \frac{4}{9n^2}\right) = \beta_n \text{ et } \sum \beta_n \text{ converge}$$

On a convergence normale sur $]0, \frac{2}{3}]$. On peut passer à la limite en 0. On obtient $C = \ln \pi$ et

$$\forall x \in]0, \frac{2}{3}] \quad \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Par parité $\forall x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] - \{0\}$ $\ln \sin \pi x = \ln \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

En passant à l'exponentielle, qui est continue

$$\forall x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] - \{0\} \quad \sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$ vrai aussi si $x = 0$.

En écrivant $x \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\prod_{k=-N}^{N} (k - x)}{(N!)^2}$, on montre comme en 3 que $\theta : x \mapsto \pi x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ vérifie $\theta(x+1) = -\theta(x)$.

On étend alors la formule à $\mathbb{R}$ par périodicité.