Devoir en temps libre 3, pour le 05/10/2016
Compléments sur la théorie des séries numériques

Exercice 1: *La formule de Stirling*
1) On pose $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$. Notons $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. Montrer que $v_n = \frac{a}{n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \ln u_{n+1} - \ln u_n$ est convergente puis qu'il existe un c non nul tel que $n! \sim c\,n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
2) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire l'expression de I_{2n} et de I_{2n+1} à l'aide de $n!$ et $(2n)!$.
3) Prouver que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En déduire $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n}$.
4) Prouver finalement la formule de Stirling [1] :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad .$$

5) Soit l la limite de $\ln u_n$. Prouver qu'il existe un réel b tel que $l - \ln u_n = \frac{b}{n} + \circ(\frac{1}{n})$.
6) En déduire :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \circ(\frac{1}{n})\right) \quad .$$

Exercice 2: *Règle de Raabe-Duhamel*
1) Rappeler les définitions de $(u_n) = \circ(v_n)$ et $(u_n) \sim (v_n)$.
2) On suppose que $(u_n) = 1 + \frac{\alpha}{n} + \circ(\frac{1}{n})$. Montrer que si $\alpha > 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n > 1$, et que si $\alpha < 0$ il existe un n_0 tel que pour n plus grand que n_0 on ait $u_n < 1$.
3) On se donne deux suites à termes strictement positifs (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge il en est de même de $\sum_{n\geq 1} u_n$. Et énoncer la contraposée de cette proposition.
On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$, pour un réel α. On s'intéresse à la convergence de cette série. Si β est un réel,on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.
4) Prouver qu'il existe un réel γ tel que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \dfrac{\gamma}{n} + \circ(\dfrac{1}{n})$.
5) En vous servant des questions précédentes montrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, et qu'elle diverge si $\alpha < 1$.
6) Montrer que, en exprimant les trois premiers termes du développement asymptotique de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, que les deux suites suivantes vérifient le critère pour $\alpha = 1$: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right)$. Montrer que les deux séries associées à ces suites ne sont pas de même nature. Que peut-on en conclure ?
On suppose maintenant que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^2})$, pour un réel α, et l'on va essayer de préciser le comportement de (u_n). On choisit $\beta = \alpha$.
7) Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.
8) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$ est convergente et que la suite (w_n) converge vers un réel c non nul.
9) Donner finalement un équivalent de (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

---

1. Stirling James. 1692-1770, anglais.Cette formule apparaîtrait à la page 137 de son ouvrage *Methodus differentialis*, daté de 1730.

Exercice 3: *La transformation d'Abel*
On donne la formule de la transformation d'Abel :
soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, on pose $\forall N \in \mathbb{N}$ $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k b_k$ et $B_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_k$, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

1) Démontrer cette relation. Faire l'analogie entre cette formule et celle de l'intégration par partie.
2) En utilisant la transformation d'Abel établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x_n a_n$ si (a_n) une suite de réels tendant vers 0 en décroissant et (x_n) une suite de réels telle que $(\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 4: *Produits infinis*
On appelle produit infini une suite de la forme $(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ où (u_n) est une suite de réels. On dit que ce produit infini est convergent s'il tend vers une limite finie <u>non nulle</u>.
1) Montrer que si le produit infini associé à (u_n) est convergent alors (u_n) tend vers 0. Il existe donc un n_0 tel que $1+u_n > 0$ pour $n \geq n_0$. On supposera dans la suite que $n_0 = 0$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]-1, +\infty[$.
2) On suppose que (u_n) est une suite de réels positifs. Montrer que $(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\prod_{k=0}^{n}(1-u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent si et seulement si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
3) On suppose que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Montrer que $(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.
4) Calculer la valeur de $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})$
5) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$pour une certaine constante C.
6) Soit $N > 1$ un entier. Montrer que si $k \geq 2$ est un entier $\displaystyle\frac{1}{1-\frac{1}{k}} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{k^i}$? En déduire que si $(p_1, \ldots, p_N)$ sont les N premiers nombres premiers

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right) \geq \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{q}$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ est divergente.
Indication : Utilisez la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, et le fait qu'un produit de sommes est une somme de produits.

Exercice 5:
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, on pose $v_n = \frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n}$.
1) Etudier la suite (v_n).
On pose $w_n = \frac{v_n}{n+1}$, valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$?
2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n>=1} \frac{(n!\prod_{k=1}^{n} u_k)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ converge et que sa somme est majorée par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
3) En déduire que

$$\sum_{n>=1} (\prod_{k=1}^{n} u_k)^{\frac{1}{n}}$$

converge. Donner un majorant de sa somme.