Exercice 1 : La formule de Stirling

1) $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ $\quad v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{(n+1)!\, n^n e^{-n}\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}\; n!}$

$$v_n = \ln\left(\frac{n^{n+\frac12}}{(n+1)^{n+\frac12}}\, e\right) = 1 - \left(n+\frac12\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 - \left(n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1n\right)$$

$$v_n = 1 - \left(n+\frac12\right)\left(\frac1n - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\boxed{v_n = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Donc $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$, donc (v_n) est négatif pour n assez grand et par comparaison avec la série $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Donc $\sum_{n\geq 1} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge, donc $(\ln u_n)_{n\geq 1}$ converge

et si $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ln u_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = c = e^{\ell} > 0$ (par continuité de l'exponentielle)

Finalement $n! \sim c\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$ (car $c \neq 0$)

2) $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, (\sin^{n+1} t)\, dt = \left[-\cos t\, (\sin t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2 t \sin^n t\, dt$

$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ (en écrivant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$)

donc $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n}$

On a $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

On en déduit

$$\boxed{I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \quad \times \frac12 \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}}$$ (en insérant les nombres pairs)

$$\boxed{I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\, \frac{2n-2}{2n-1} \times \quad \times \frac23 \times 1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}}$$

1-2

3) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $0 \leq \sin t \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$.

Par intégration $I_{n+1} \leq I_n$ (et par conséquent $I_{n+2} \leq I_{n+1}$)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1}$ Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1}$

4) On a donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. En remplaçant I_{2n} et I_{2n+1} par leurs expressions. $\lim_{n \to +\infty} \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} \frac{2}{\pi} = 1$.

En remplaçant les factorielles par leurs équivalents

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2^n n^n c e^{-n} \sqrt{n})^4}{(2^{2n} n^{2n} c e^{-2n} \sqrt{2n})^2} \frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{c^2}{2\pi}.$$

Donc $\boxed{c = \sqrt{2\pi}}$ et $\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$

5) $\ell - \ln u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{\ln u_{k+1} - \ln u_k}_{v_k}$. Or (v_k) est négative et $\sum v_n$ converge. On peut utiliser le théorème sur la sommation des équivalents et

$$\ell - \ln u_n \sim -\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{12n}.$$

(en cadrant $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$ par des intégrales)

Donc $u_n = \exp\left(\ell + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = c \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = c\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

et on a bien $\boxed{n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

PS) (Il reste de la place) $\boxed{\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}}$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} - \int_{n+1}^{N} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{N^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{N}$$

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

donc $\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}}$

Exercice 2 la règle de Raabe-Duhamel

1) $u_n = o(v_n) \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|)$

$u_n \sim v_n \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} (u_n - v_n) = o(v_n)$

2) $u_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + v_n$ avec $v_n = o(u_n)$. Dans la définition ci-dessus on choisit $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$. Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0\ |v_n| \leq \frac{\alpha}{2n}$.

Donc $\forall n \geq n_0$ ~~de~~ $v_n \geq -\frac{\alpha}{2n}$, puis $\forall n \geq n_0\ u_n \geq 1 + \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{2n} = 1 + \frac{\alpha}{2n} > 1$

le cas $\alpha < 0$ se traite de même en prenant $\varepsilon = -\frac{\alpha}{2} > 0$

3) Si il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. alors puisque $u_n > 0$ $v_{n+1} > 0$ $\quad \forall n \geq n_0\quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ donc par récurrence $\forall n \geq n_0\quad \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = C$.

Donc $u_n = O(v_n)$, et puisque $\sum v_n$ est une série à termes positifs si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge & et par contraposition si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

4) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta}$ donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \gamma = \beta - \alpha$$

5) On suppose $\alpha > 1$. On choisit $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, $1 < \beta < \alpha$. alors $\beta - \alpha < 0$ donc il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0\ \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ (question 2). Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge car $\beta > 1$, par conséquent $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (question 3) (PS: $\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ équivaut à $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$).

De même si $\alpha < 1$ en prenant encore $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$, $\alpha < \beta < 1$ on aura $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$. et $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. (contraposée)

6) - Si $u_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $\alpha = 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

- Si $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-2}$

$$= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{-2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{-2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $\alpha = 1$ et $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

(en effet $\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$, donc

$\lim_{n\to+\infty} \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ existe et $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2}\right) - \int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x}\right)$

existe car $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2 x}$ est positive décroissante sur

$[2, +\infty[$).

On en déduit que si $\alpha = 1$ on ne peut pas conclure.

7) On suppose maintenant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Soit $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha}$.

Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = \left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

8) On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + z_n > 0$ avec $z_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\ln w_{n+1} - \ln w_n = \ln(1+z_n) = \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

donc $\ln w_{n+1} - \ln w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\left(\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u) = O(u)\right)$

donc $\boxed{|\ln w_{n+1} - \ln w_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

donc $\sum_{n \geq 1} |\ln w_{n+1} - \ln w_n|$ converge.

donc $\boxed{\sum_{n \geq 1} (\ln w_{n+1} - \ln w_n) \text{ converge.}}$ (car elle converge absolument)

puis $(\ln w_n)_{n \geq 1}$ converge (lien suite - série)

Il existe ℓ tel que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \ln w_n = \ell.}$

exp est continue donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = C = e^{\ell} > 0}$

9) Finalement $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n} = C > 0$

donc $\boxed{u_n \sim C\, v_n = \frac{C}{n^\alpha}}$

et $\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge ssi } \alpha > 1.}$

Exercice 3 la transformation d'Abel

1) $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k b_k$, or $b_k = B_k - B_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $b_0 = B_0$

donc $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_0 B_0$ (pour $N \geq 1$) (la formule est vraie pour $N=0$)

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=1}^{N} a_k B_{k-1} + a_0 B_0$$

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k + a_0 B_0$$

$$S_N = a_N B_N + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_1 B_0 + a_0 B_0$$

$$\boxed{S_N = a_N B_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) B_k}$$

Cette formule peut être mise en parallèle avec la formule d'intégration par parties

$$\int_0^x a(t) b(t)\,dt = a(x) \int_0^x b(t)\,dt - \int_0^x a'(t) \left(\int_0^t b(u)\,du\right) dt$$

si a est de classe $\mathcal{C}^1$ et b continue.

2) On aura $\sum_{k=0}^{N} a_k x_k = a_N X_N + \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1}) X_k}_{y_k}$

où $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

- La suite $(X_N)_{N\geq 0}$ est bornée et (a_N) tend vers 0 donc $\lim_{N\to+\infty} a_N X_N = 0$

- $|y_k| \leq (a_k - a_{k+1}) M$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et M choisi tel que $\forall k\ |X_k| \leq M$.

Or (a_n) converge, donc $\sum_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1})$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1}) M$ aussi. Donc $\sum_{n\geq 0} |y_n|$ aussi (critère de majoration), donc $\sum y_n$ converge absolument donc converge et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} y_k$ existe

Finalement $\sum_{n\geq 0} a_n x_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) X_n$

Exercice 4 Produits infinis

1) Notons $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1+U_k)$.

S'il existe un n tel que $P_n = 0$ alors pour tout $m \geq n$ on aura $P_m = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} P_n = 0$.

Donc si le produit $\prod_{n \geq 0} (1+U_n)$ est convergent de limite ℓ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n \neq 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (1+U_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\ell}{\ell} = 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} (1+U_n) = 1$ et $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $(1+U_n) > 0$

de même $\exists n_1$ $\forall n \geq n_1$ $1-U_n > 0$.

On suppose dans la suite que $n_0 = 0$ (donc $U_n \in]-1, 1[$ pour tout n. Légère erreur d'énoncé)

2) Par hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}$ $\prod_{k=0}^{n} (1+U_k) > 0$ (resp. $\prod_{k=0}^{n} (1-U_k) > 0$) et le logarithme est continu. Donc si $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+U_k) = L > 0$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1-U_k) = L > 0$) on aura.

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1+U_k) = \ln(L)$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1-U_k) = \ln L$)

la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1+U_n)$ est donc convergente (resp. $\sum_{n \geq 0} \ln(1-U_n)$), or c'est une série à termes positifs (resp. négatifs) car $1+U_n \geq 1$ (resp $1-U_n \leq 1$) et $\ln(1+U_n) \sim U_n$ (resp. $\ln(1-U_n) \sim -U_n$) car (U_n) tend vers zéro.

On en déduit que $\sum U_n$ converge. (resp $\sum -U_n$ converge).

Le raisonnement se remonte sans difficulté. (On aurait dû raisonner par équivalence)

3) On suppose que $\sum u_n$ converge.

On a vu que le produit convergeait si et seulement si $(u_n)_{n\geq 0}$ tendait vers 0 et $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ convergeait.

Or puisque $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 0} (\ln(1+u_n) - u_n)$ converge.

Or $\ln(1+u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$ si u_n tend vers 0 et la suite $\left(\frac{u_n^2}{2}\right)$ est positive donc

$$\sum_{n\geq 0} (\ln(1+u_n) - u_n) \text{ converge ssi } \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} u_n^2 \text{ converge.}$$

et finalement $\prod_{n\geq 0} (1+u_n)$ converge ssi $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge

4) $P_{2n} = (1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \quad \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \quad \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$

$P_{2n} = 1$

$P_{2n+1} = P_{2n} \times \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2n+1}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = 1 = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

5) $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$

$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k$ avec

$u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + v_k$ avec $v_k \in O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge (Règle de Leibniz), $\sum v_n$ converge absolument donc converge (Règle de Riemann) et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ ((cours))

Donc $\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{1}{2}\ln n + C_1 + o(1)$ et en passant à l'exponentielle

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{C_1}(1+o(1)) \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$$

6) Si $k \geq 2$. $0 < \frac{1}{k} < 1$ donc.

$$\frac{1}{1-k^{-1}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^i \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{k^i}$$

Donc $\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right) \geq \prod_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_j^i}\right) = \prod_{j=1}^{N} \left(\sum_{i_j=0}^{N} \frac{1}{p_j^{i_j}}\right)$

$$\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right) \geq \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq N \\ \vdots \\ 0 \leq i_N \leq N}} \frac{1}{p_1^{i_1} \cdots p_N^{i_N}}$$

Or tout entier n de $[1, N]$ se décompose en facteurs premiers et tous ces facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à N donc sont parmi les p_k, $1 \leq k \leq N$.

~~Tout entier~~. Donc pour tout entier n de $[1, N]$ $\frac{1}{n}$ apparaît dans la somme (et tous ces termes sont distincts)

donc $\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(1-\frac{1}{p_j})} \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$

Or $\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = +\infty$ donc

$$\lim_{N \to +\infty} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = 0.$$

le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ est donc divergent

et par conséquent $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 5

1) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. On a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ (et R_n est bien défini) car $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

$$\boxed{v_n + R_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \quad + n v_n + n R_n}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} R_k}{n}}$$

Donc d'après le théorème de Cesàro $\lim_{n\to+\infty}(v_n + R_n) = 0$ et en particulier $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$

2) $w_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$ ~~$= \frac{1}{n(n+1)} \sum$~~

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k u_k}{(n+1)n}$$

(On peut écrire cela en s'autorisant une somme infinie car on somme des réels positifs)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}$$

avec $u_{n,k} = 0$ si $k > n$
$u_{n,k} = \frac{k u_k}{n(n+1)}$ si $k \leq n$.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}$$

(permutation autorisée car c'est une suite double de réels positifs. De plus le calcul va nous permettre d'obtenir un réel (fini) ce qui justifie la sommabilité de $(u_{n,k})$ et la possibilité de permuter)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} k u_k$$

(car $u_{n,k} = 0$ si $n < k$)

Or $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\quad \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}$

donc $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k}$ et finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

2) On utilise l'inégalité de la moyenne géométrique

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$ Ici $x_k = k u_k \geqslant 0$.

Donc $$\boxed{0 \leq \frac{\left(n!\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \leq \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k = w_n.}$$

Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(n!\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ est convergente et sa somme est majorée par $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$

3) $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $[1,+\infty[$. Donc

$\forall k \in [2,+\infty[$ $\ln k \geqslant \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx$. Puis, puisque $\ln 1 = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \ln k \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x\,dx = \int_1^n \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^n$$

Donc $\boxed{\ln(n!) \geqslant n\ln n - n + 1.}$

$$n! \geqslant n^n e^{-n} e.$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \geqslant n e^{-1} e^{\frac{1}{n}} \geqslant n e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (\text{car } e^u \geqslant 1+u)$$

$$\boxed{\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1} e^{-1}(n+1) = \frac{1}{e}}$$

Finalement

$$\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq e\left(\frac{\left(n!\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}}{n+1}\right)$$

Donc $\sum_{n\geqslant 1} \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq e\sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

Rq: On pourrait montrer que e est la meilleure constante possible (prendre pour $\sum u_n$ la série harmonique tronquée à l'ordre N et faire tendre N vers $+\infty$)