Concours Commun Mines-Ponts 2014
Deuxième épreuve de Mathématiques MP

Cet énoncé n'est pas exactement le sujet original. Ce dernier a été modifié pour être conforme au programme actuel et tenir compte de vos connaissances en début d'année.

E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ dans lequel toute série absolument convergente est convergente, par exemple un espace vectoriel de dimension finie ou un espace de fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme. La norme est notée $\| \ \|$.

On rappelle qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente.

Si A est une partie de E on note $\overline{A}$ son adhérence, A° son intérieur, $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ sa frontière et $d(x, A)$ la distance de x à A (note [1]). On note respectivement $B(x, r) = \{y \in E; \|y - x\| < r\}$ et $\overline{B}(x, r) = \{y \in E; \|y - x\| \leq r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r. Etant données deux parties A et B de E, et une application $f : A \to B$, on rappelle que x est un point fixe de f si c'est une solution de l'équation $f(x) = x$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$, c'est-à-dire si il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout x, y dans A $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ (note [2]).

On rappelle qu'une fonction lipschitzienne est continue.

Dorénavant dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide.

A. Théorème du point fixe.

Dans cette partie préliminaire on établit le

Théorème(Picard). *Tout application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*

Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1) Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ci est unique.

Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

2) Montrer que pour tout n $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|$. en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Conclure.

---

1. Il est à noté que l'énoncé parlait de la distance de la partie au point.
2. Là l'auteur du sujet commet une erreur sérieuse (corrigée ici) en inversant l'ordre des quantificateurs ($\forall x \forall y\ \exists k$).
Tous les sujets du concours commun Mines-Ponts commencent par cet avertissement « Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. ». C'était une occasion de le mettre en pratique.

B. Invariance par homotopie.

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application $h : A \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$, on a $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$, et qui vérifie :

a) Il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout x, y dans A et tout t dans $[0,1]$, on a :

$$\|h(x,t) - h(y,t)\| \leq k\|x - y\|;$$

b) il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout t et u dans $[0,1]$ et tout x de A ,

$$\|h(x,t) - h(x,u)\| \leq k'|t - u|;$$

c) pour tout t de $[0,1]$ et tout x de ∂A on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose

$$T = \{t \in [0,1]; \forall u \in [0,t]\ \exists x \in A\ x = h(x,u)\}.$$

4) Vérifier que T n'est pas vide. En déduire que T possède une borne supérieure noté α.

Soit (t_n) une suite croissante d'éléments de T convergeant vers α. On choisit une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

5) Vérifier qu'un telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tout entier naturel n

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{k'}{1-k}(t_{n+1} - t_n).$$

6) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que α appartient à T.

Soit encore t dans T et x dans A tels que $x = h(x,t)$.

7) Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$

Soit r et ϵ deux nombres réels strictement positifs tels que $\epsilon \leq \frac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x, \partial A)$ et soit u dans $[0,1]$ tel que $|t - u| < \epsilon$.

8) Montrer que pour tout y de $\overline{B}(x,r) \cap A$, on a $\|x - h(y,u)\| \leq r$.

9) En déduire en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'application $y \mapsto h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

10) En déduire que $\alpha = 1$ et que g possède un point fixe, intérieur à A.

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ possède un point fixe, mais on fait les trois hypothèses suivantes :

d) le vecteur nul 0 est intérieur à A;

e) l'image $f(A)$ de A par f est bornée;

f) pour tout x de ∂A et tout t de $[0,1]$, on a $x \neq tf(x)$.

11) Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. Etude de certains opérateurs à noyau.

Soit a et b deux réels et $f : [a,b] \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ contenant 0 et un réel $K_0 > 0$ vérifiant pour tout (t,u) et (t,v) dans $[a,b] \times D$

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K_0 |u - v|.$$

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ de la norme $\|\phi\| = \sup_{x\in[a,b]} |\phi(x)|$. On admet, ce qui sera prouvé ultérieurement dans le cours, que dans E muni de $\| \ \|$ toute série absolument convergente est convergente.

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application F de E vers lui-même par la formule :

$$F(\phi)(t) = \int_a^b K(t,x) f(x,\phi(x))\, dx.$$

12) Montrer qu'on définit bien une application de E vers E. Attention ! Vous n'avez pas le droit d'utiliser de théorèmes sur les intégrales à paramètre. La démonstration doit être directe, en utilisant la continuité uniforme de

$$(t,x) \mapsto K(t,x) f(x,\phi(x))$$

sur $[a,b] \times [a,b]$, qui devra être justifiée.

On pose $\alpha = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,x)|\, dx$.

13) Pour toutes fonctions y et z de E telles que pour tout t de $[a,b]$, on a $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, démontrer l'inégalité

$$\|F(y) - F(z)\| \leq \alpha K_0 \|y - z\|.$$

Soit A une partie fermée et bornée de E contenant la fonction nulle dans son intérieur et telle que pour tout ϕ de A et tout t de $[a,b]$, on a $\phi(t) \in D$. On suppose en outre que $\alpha K_0 < 1$ et que pour tout ϕ de ∂A et λ de $[0,1]$, on a $\phi \neq \lambda F(\phi)$.

14) Montrer que F admet un unique point fixe, intérieur à A.

D. Une généralisation.

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que

g) le vecteur nul est intérieur à A ;

h) l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact ;

i) pour tout x de ∂A et tout t de $[0,1]$, on a $x \neq tf(x)$

On pose

$$X = \{x \in A ; \exists t \in [0,1]\ x = tf(x)\}.$$

15) Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0,1]$ définie par la formule

$$\mu(x) = \frac{d(x,\partial A)}{d(x,\partial A) + d(x,X)}$$

est bien définie et continue. Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \mu(x)f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C - A \end{cases}$$

16) Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le

Théorème(Schauder). *Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.*

17) Conclure, à l'aide du théorème de Schauder, que f admet un point fixe intérieur à A.

E. Application aux intégrales de Fredholm.

Cette partie contenait encore sept questions. Elle n'est pas abordable pour l'instant car elle utilise la notion de convergence d'une suite de fonctions. Le sujet complet est disponible sur le site du concours commun des Mines.