Commentaires sur le devoir DM01 Mathématiques

1) Deux polynômes égaux en une infinité de valeurs sont égaux.

Ex : Il n'existe qu'un seul polynôme T_2 tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos 2\theta = T_2(\cos\theta)$, car si P est un polynôme vérifiant $P(\cos\theta) = \cos 2\theta$ pour θ réel on aura

$$P(\cos\theta) = T_2(\cos\theta) \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R} \quad \text{et } \{\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

est infini, donc $P = T_2$.

Or $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = (2X^2-1)(\cos\theta)$

donc T_2 existe et $T_2 = 2X^2 - 1$.

Cet argument servait plusieurs fois dans le problème.

2) $$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\left\{(1+1)^n + (1-1)^n\right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

car $\underline{(1-1)^0 = 1 \text{ et non pas } 0}$

3) <u>Exercice ultraclassique.</u>

M est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det M = \pm 1$

$\Rightarrow$) <u>On suppose M inversible</u> dans $M_n(\mathbb{Z})$. Donc il existe M' dans $M_n(\mathbb{Z})$ telle que $MM' = M'M = I_n$.

On a donc $\det M \det M' = 1$. Or $\det M \in \mathbb{Z}$ $\det M' \in \mathbb{Z}$

donc $\det M$ est inversible dans $\mathbb{Z}$ et par conséquent $\underline{\det M = \pm 1}$

$\Leftarrow$ <u>On suppose $\det M = \pm 1$</u>. On pose $M' = \frac{1}{\det M} {}^t\mathrm{com}(M)$

$M' = \pm\, {}^t\mathrm{com}(M)$ donc $M' \in M_n(\mathbb{Z})$

Mais $MM' = M'M = I_n$ $\quad$ (car $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $A\, {}^t\mathrm{com}(A) = \det A\, I_n = {}^t\mathrm{com}(A)\, A$)

donc M est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$

Remarques d'ordre général

- Mettre vos résultats en évidence.
- Répondez explicitement aux questions posées.
- Apportez des arguments (hypothèses des théorèmes par exemple) ne vous contentez pas d'affirmations
- Structurez vos démonstrations

  Par exemple : on doit voir clairement qu'une démonstration par double inclusion, ou double implication, est décomposée en deux parties bien définies.

Remarques sur la rédaction

- Faites de vrais indices x_{i+1} pas $xi+1$, etc...
- Pas de ligne commençant à la marge par $=$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$
- Ne commencez pas une partie ou une démonstration en bas de page.