Concours Mines-Ponts 2014

Deuxième épreuve de Mathématiques MP

(Légèrement modifié et sans la ~~quatrième~~ cinquième partie)

A) Théorème du point fixe.

1) Supposons que f admette au moins deux points fixes distincts a et b.

Alors $\|a-b\| = \|f(a)-f(b)\| \leq k\|a-b\|$

$(1-k)\|a-b\| \leq 0$

$\|a-b\| \leq 0$ (car $1-k>0$)

$\|a-b\| = 0$

$a = b$

Ce qui est contradictoire. f admet au plus un point fixe

2) * Le résultat demandé s'établit par récurrence.

- Il est vrai pour $n=0$ $\|x_1-x_0\| \leq k^0\|x_1-x_0\|$
- Si il est vrai à l'ordre n

$$\|x_{n+2}-x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1})-f(x_n)\| \leq k\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^{n+1}\|x_1-x_0\|$$

et il est donc vrai à l'ordre $n+1$

* On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|$

Or $\sum_{n\geq 0} k^n\|x_1-x_0\|$ converge (vers $\frac{1}{1-k}\|x_1-x_0\|$)

Donc $\sum_{n\geq 0}\|x_{n+1}-x_n\|$ converge.

$\sum_{n\geq 0} x_{n+1}-x_n$ converge absolument (définition)

$\sum_{n\geq 0} x_{n+1}-x_n$ converge (propriété de E)

$(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

3) - La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente et A est fermée donc $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à A.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad x_{n+1} = f(x_n)$ et f est continue sur A donc en a.

Par passage à la limite $\underline{a = f(a)}$

f possède donc un point fixe a dans A (unique d'après la question 1) et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ (pour toute valeur de x_0)

B) Invariance par homotopie.

4) - f possède un point fixe dans A et $\forall x \in A$ $f(x) = h(x,0)$

donc $0 \in T$ et $T \neq \emptyset$

- T est majoré par 1

Il résulte de ces deux points que $\underline{\alpha = \sup T \text{ existe}}$.

5) - $t_n \in T$ donc $\forall u \in [0, t_n]$ $\exists x \in A$ $x = h(x,u)$ en particulier $\exists x_n \in A$ $\underline{x_n = h(x_n, t_n)}$

- $$x_{n+1} - x_n = h(x_{n+1}, t_{n+1}) - h(x_n, t_n)$$
$$= h(x_{n+1}, t_{n+1}) - h(x_n, t_{n+1}) + h(x_n, t_{n+1}) - h(x_n, t_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|h(x_{n+1}, t_{n+1}) - h(x_n, t_{n+1})\| + \|h(x_n, t_{n+1}) - h(x_n, t_n)\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_{n+1} - x_n\| + k'|t_{n+1} - t_n|$$

$$(1-k)\|x_{n+1} - x_n\| \leq k'|t_{n+1} - t_n|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{k'}{1-k}|t_{n+1} - t_n| \quad (\text{car } 1-k>0)$$

(car $t_{n+1} \geq t_n$)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{k'}{1-k}(t_{n+1} - t_n)}$$

6) La série $\sum_{n\geq 0} (t_{n+1} - t_n)$ converge. (vers $\alpha - t_0$)

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{k'}{1-k} (t_{n+1} - t_n)$ converge

donc la série à terme positif $\sum_{n\geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ converge

donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge. (même raisonnement qu'en 1)

A est fermé, donc $a = \lim_{n\to+\infty} x_n \in A$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $h(x_n, t_n) = x_n$ et h est continue

car $(k+k')$-lipschitzienne (En effet

$\forall ((x, t), (y, u)) \in (A\times[0,1])^2$

$h(x,t) - h(y,u) = h(x,t) - h(x,u) + h(x,u) - h(y,u)$

$\|h(x,t) - h(y,u)\| \leq k' |t-u| + k\|x-y\|$

$\leq (k+k') \|((x-y), (t-u))\|_{E\times\mathbb{R}}$

$\|h(x,t) - h(y,u)\| \leq (k+k') \|(x,t) - (y,u)\|_{E\times\mathbb{R}}$

Par passage à la limite $a = h(a, \alpha)$

De plus $\forall u \in [0, \alpha[$ $\exists t \in T$ $u < t \leq \alpha$

donc $\forall u \in [0, \alpha[$ $\exists t \in T$ $u \in [0, t]$

$\forall u \in [0, \alpha[$ $\exists x \in A$ $x = h(x, u)$

et finalement $\forall u \in [0, \alpha]$ $\exists x \in A$ $x = h(x, u)$

donc $\alpha \in T$.

7) Si $x \in A$ et est tel que $x = h(x,t)$ alors $x \notin \partial A$. Or $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(E-A)}$ est fermé. Donc son complémentaire est ouvert et par conséquent il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E - \partial A$. C'est à dire $\forall y \in \partial A$ $\|y - x\| \geq r$ et par conséquent $d(x, \partial A) \geq r > 0$

8) - $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$ donc $\|y-x\| \leq r$

- $\|x - h(y,u)\| = \|h(x,t) - h(y,u)\|$

$$= \| h(x,t) - h(y,t) + h(y,t) - h(y,u)\|$$

$$\|x - h(y,u)\| \leq \| h(x,t) - h(y,t)\| + \|h(y,t) - h(y,u)\|$$

$$\leq k \|x-y\| + k' |t-u|$$

$$\leq k r + k' \frac{(1-k) r}{k'}$$

$$\|x - h(y,u)\| \leq r.$$

9) - Soit $A' = \overline{B}(x,r) \cap A$. D'après la question précédente $\varphi_u : y \mapsto h(y,u)$ est une application de A' dans A'.

- D'après l'hypothèse a), cette application est contractante

- A' est fermé (intersection de deux fermés) et non vide ($x \in A'$).

De ces trois assertions et du théorème de Picard on peut en déduire qu'il existe y dans A' tel que $y = h(y,u)$ (point fixe de φ_u).

$y \in A$ car $A' \subset A$

$y \notin \partial A$ car $\|x-y\| \leq r < d(x, \partial A)$, donc y est intérieur à A.

10) Si $\alpha < 1$, puisque α appartient à T il existe x dans A tel que $x = h(x,\alpha)$.

On prend $r = d(x, \partial A)/2$ et on choisit

$\varepsilon = \min\left(\frac{1-k}{k'} r, \frac{1-\alpha}{2}\right) > 0$. Alors d'après la question précédent $\forall u \in [\alpha, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}]$ $\exists y \in A$ $y = h(y,u)$, donc

$\forall u \in [0, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}]$ $\exists y \in A$ $y = h(y,u)$ (et $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1$)

Donc $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \in T$, ce qui contredit la définition de α comme borne supérieure.

Donc $\alpha = 1$ et puisque $\alpha \in T$ $\exists$ ~~z~~ $z = h(z, 1) = g(z)$ et z est intérieur à A. g possède bien un point fixe intérieur à A.

11) Définissons $k : A \times [0,1] \longrightarrow E$ ~~par~~
$(x, t) \longmapsto t f(x)$

alors

- $\forall t \in [0,1]$ $\forall (x,y) \in A^2$.

$$\|k(x,t) - k(y,t)\| = |t| \, \|f(x) - f(y)\|$$
$$\leq \|f(x) - f(y)\|$$
$$\|k(x,t) - k(y,t)\| \leq k \, \|x - y\| \qquad k \in [0,1[\text{ (associé à } f.$$

- $\forall x \in A$ $\forall (t,u) \in [0,1]^2$

$$\|k(x,t) - k(x,u)\| = |t - u| \, \|f(x)\|$$
$$\|k(x,t) - k(x,u)\| \leq |t - u| \sup_{x \in A} \|f(x)\| \qquad \text{(hypothèse e))}$$

- pour tout t de $[0,1]$ et tout x de ∂A $x \neq t f(x)$.
(C'est l'hypothèse f))

- $0 \in \mathring{A}$ donc $0 \in A$ et $k(0,0) = 0$. (hypothèse d))
(partiellement utilisée. En fait f) implique que si 0 est dans A il est dans l'intérieur de A. L'hypothèse $0 \in A$ suffisait)

D'après le résultat de la question 10) l'application $x \longmapsto k(x,1) = f(x)$ possède un point fixe intérieur à A. Il est unique car f est contractante.

C. Etude de certains opérateurs à noyau.

12) K est continue, f et φ aussi, donc par composition

$$H : [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t\ ,\ x) \longmapsto K(t,x)\, f(x,\varphi(x))$$

est continue.

$\Delta = [a,b]\times[a,b]$, produit de segments donc de compacts, est compact donc H est uniformément continue.

Donc

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall (t,x)\in\Delta\ \forall (t',x')\in\Delta\ \|(t,x)-(t',x')\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}<\eta \Rightarrow |H(t,x)-H(t',x')|<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall (t,x)\in\Delta\ \forall (t',x')\in\Delta\ |t-t'|<\eta\ \ |x-x'|<\eta \Rightarrow |H(t,x)-H(t',x')|<\varepsilon$$

En faisant $x=x'$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall (t,t')\in[a,b]^2\ |t-t'|<\eta \Rightarrow |H(t,x)-H(t',x)|<\varepsilon.$$

Or $$\left|F(\varphi)(t)-F(\varphi)(t')\right| \leq \int_a^b |H(t,x)-H(t',x)|\,dx.$$

donc

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall (t,t')\in[a,b]^2\ |t-t'|<\eta \Rightarrow |F(\varphi)(t)-F(\varphi)(t')| \leq (b-a)\,\varepsilon$$

En choisissant un η' associé à $\dfrac{\varepsilon}{(b-a)+1}$, on obtient

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta'>0\ \forall (t,t')\in[a,b]^2\ |t-t'|<\eta' \Rightarrow |F(\varphi)(t)-F(\varphi)(t')|<\varepsilon.$$

ce qui prouve bien que $F(\varphi)$ est continue (et même uniformément continue)

F définit bien une application de E vers E.

13) $\forall t \in [a,b]$

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_a^b k(t,x)\big(f(x,y(x)) - f(x,z(x))\big)\,dx.$$

$$|F(y)(t) - F(z)(t)| \leq \int_a^b |k(t,x)|\,|f(x,y(x)) - f(x,z(x))|\,dx$$

$$\leq \int_a^b |k(t,x)|\,K_0\,|y(x) - z(x)|\,dx$$

$$\leq \int_a^b |k(t,x)|\,K_0\,\|y - z\|\,dx$$

$$|F(y)(t) - F(z)(t)| \leq \alpha K_0 \|y - z\|$$

En passant à la borne supérieure $\|F(y) - F(z)\| \leq \alpha K_0 \|y - z\|$

14) Il résulte du calcul précédent que la restriction de F à A est contractante car $\alpha K_0 < 1$.

- le vecteur 0 est intérieur à A
- l'image de A par F bornée. En effet

$\forall (t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \quad |f(t,u)| \leq K_0 |u| + |f(t,0)|$

Or $t \mapsto f(t,0)$ est continue et bornée sur $[a,b]$

donc $\forall (t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \quad |f(t,u)| \leq K_0 |u| + M.$

donc $\forall x \in [a,b] \quad \forall \varphi \in A \quad |f(x, \varphi(x))| \leq K_0 \|\varphi\| + M$

$\forall x \in [a,b] \ \forall \varphi \in A \ |f(x, \varphi(x))| \leq K_0 \sup_{\varphi \in A} \|\varphi\| + M = M_1$

et finalement $\forall \varphi \in A \quad \|F(\varphi)\| \leq \alpha M_1.$

- $\forall \varphi \in \partial A.\ \forall \lambda \in [0,1] \quad \varphi \neq \lambda F(\varphi)$

Le résultat de la question 11 nous donne donc l'existence d'un unique point fixe pour F, intérieur à A

D. Une généralisation

15) X est non vide, car il contient le vecteur nul.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergeant vers un élément x de E.

A est fermé donc x appartient à A

$\forall n \ \exists t_n \in [0,1] \qquad x_n = t_n f(x_n)$.

$[0,1]$ est compact, on peut donc extraire de $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente (dans $[0,1]$) $(t_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$, $t = \lim\limits_{n\to+\infty} t_{\varphi(n)}$

Or a toujours $\forall n\in\mathbb{N} \ x_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)})$

f est continue, on peut donc passer à la limite et

$$x = t\, f(x)$$

Donc $x \in X$.

Toute suite d'éléments de X qui converge vers un élément de X

donc X est fermé.

De plus $X \cap \partial A = \emptyset$ par hypothèse et ∂A est fermé

Or si P est fermé $d(x,P)=0 \iff x\in P$.

donc $\forall x \in E \quad d(x,X) + d(x,\partial A) > 0$ car on ne peut avoir $d(x,X) = 0 = d(x,\partial A)$ (qui impliquerait $x \in X \cap \partial A$). L'application μ est donc bien définie.

L'application μ est continue car pour toute partie non vide $x \mapsto d(x,P)$ est 1-lipschitzienne donc continue.

$\forall x \in X \quad \mu(x) = \dfrac{d(x,\partial A)}{d(x,\partial A)} = 1$ $\qquad \forall x \in \partial A \quad \mu(x) = 0$

16) On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit x dans C et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers x.

. Si $x \notin A$, puisque $E-A$ est ouvert $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n \in A$
($\exists \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \subset E-A$, $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \|x_n - x\| < \varepsilon$).

Donc $\forall n \geq n_0 \quad g(x_n) = 0 = g(x)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$

. Si $x \in \mathring{A}$, c'est le même argument : $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n \in \mathring{A}$

Donc $\forall n \geq n_0 \quad g(x_n) = \mu(x_n) f(x_n)$

Or μf est continue sur A donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \mu(x) f(x) = g(x)$

. Si $x \in \partial A$. Alors soit

cas 1 : $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad x_n \notin A$ or a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0 = g(x)$

cas 2 : $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad x \in \mathring{A}$

cas 3 : $\mathbb{N} = \{n, \ x_n \in A\} \cup \{n, \ x_n \in E-A\}$ et ces deux ensembles étant disjoints et infinis.

$\mathbb{N} = \{\varphi(n), \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(n), \ n \in \mathbb{N}\}$ où φ et ψ sont strictement croissante.

L'étude précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_{\varphi(n)}) = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_{\psi(n)}) = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.

On a bien prouvé que g est continue.

Pour établir la compacité de $\overline{g(C)}$, déterminons d'abord cette adhérence.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $g(C)$

Si on peut extraire de cette suite une suite telle que $\forall n \quad z_{\varphi(n)} \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0 \in \{\lambda y, \lambda\in[0,1], y\in \overline{f(A)}\}$

Sinon on peut extraire de cette suite une suite

$$(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0} = (\mu(x_{\varphi(n)}) f(x_{\varphi(n)})) \quad \text{où } x_{\varphi(n)}\in A.$$

Or $\overline{f(A)}$ est compact et $\forall n \quad f(x_{\varphi(n)}) \in f(A) \subset \overline{f(A)}$

et $\mu(x_{\varphi(n)}) \in [0,1]$ qui est compact.

On peut donc extraire de $(z_{\varphi(n)})$ une suite

$(z_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$ telle que $\lim \mu(x_{\varphi(\psi(n))}) = \lambda \in [0,1]$

existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(\psi(n))}) = y \in \overline{f(A)}$ existe.

On en déduit $\overline{g(C)} \subset \{\lambda y, \lambda\in[0,1], y\in\overline{f(A)}\} = B$

Or $[0,1]$ est compact $\overline{f(A)}$ est compact donc

B est compact car $(\lambda, y)\mapsto \lambda y$ est continue.

$\overline{g(C)}$ est un fermé contenu dans un compact, donc

$\overline{g(C)}$ est compact

17) D'après le théorème de Schauder g possède un point fixe a.

- Si $a\in C-A$ alors $a=g(a)=0$ ce qui est impossible car $0\in A$.
- Donc $a\in A$ et ~~$a\in A$~~ $a=\mu(a)f(a)$ or $\mu(a)\in[0,1]$ donc.

$a\in X$ et $X\cap\partial A=\emptyset$ donc $a\in\mathring{A}$ et $\mu(a)=1$ donc $f(a)=a$