CCM ~~1985~~ 1995 MP Mathématiques II

Suites récurrentes, fractions rationnelles et nombres de Pisot

Première partie

1 a)

- Il est clair que si la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est nulle, alors pour tout n Δ_n est nul

- Réciproquement, supposons que $(c_n)_{n\geq 0}$ ne soit pas la suite nulle. Soit $p = \min\{n,\ c_n \neq 0\}$.

On a

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & & & c_p \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \times \\ c_p & & & \end{vmatrix}$$

Δ_p est de taille $p+1$. En échangeant la première ligne avec la $p+1$-ème, la deuxième avec la p-ième, on effectue $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ transposition et on obtient

$$\Delta_p = (-1)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} c_p & & \times \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & c_p \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} c_p^{p+1}$$

Donc $\Delta_p \neq 0$, c'est-à-dire $\exists n \in \mathbb{N}\ \Delta_n \neq 0$

1.b) Si $\mathcal{C}$ est pseudo-périodique avec

$$\forall k \geq p \quad c_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{k-j}$$

Alors $\forall n \geq p$ $\forall i \in [0, n]$ $c_{p+i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{p-j+i}$

la $p+1$-ème colonne de Δ_n est une combinaison linéaire des p colonnes qui la précède et par conséquent $\Delta_n = 0$

1.c)

On remarquera que les hypothèses impliquent
$n-(m-1) \geq m+1$.

$$\Delta_{n-m-1} = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{n-m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & \cdots & c_{2m} & & & \vdots \\ & & & c_{2m+2} & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & c_n & \vdots \\ c_{n-m-1} & \cdots & c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2(n-m-1)} \end{vmatrix}$$

Effectuons sur les colonnes de Δ_{n-m-1} les opérations

$$Col_j = Col_j - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, Col_{j-k}$$

pour j décroissant de $n-m-1$ à $m+1$. (On remarquera que c'est ici que sert l'hypothèse $p \leq m+1$, et aussi que les colonnes sont indexées à partir de 0)

Ces opérations (des transvections) ne changent pas la valeur du déterminant.

$$\Delta_{n-m-1} = \begin{vmatrix} c_0 & & c_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ c_m & & c_{2m} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & 0 & a \\ & & & \vdots & & \iddots & \\ & & & 0 & & & \times \\ c_{n-m-1} & & c_{n-1} & a & & & \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n-m-1} = \Delta_m \, (-1)^{\left\lfloor \frac{n-2m-1}{2} \right\rfloor} a^{n-2m-1}.$$

avec $a = c_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j}$

Par conséquent <u>si $\Delta_m \neq 0$</u> et <u>$\Delta_{n-m-1} = 0$</u>

on a $\underline{c_n - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_{n-j} = 0}$

1.d)

- <u>On a déjà prouvé</u> en 1.b) que si C est pseudo-périodique il existe q tel que $\Delta_n = 0$ pour $n \geqslant q$.

- <u>Réciproquement</u> soit C une suite telle qu'il existe q avec $\forall n \geqslant q \quad \Delta_n = 0$.

  - Si $q_0 = \min\{q, \forall n \geqslant q \ \Delta_n = 0\} = 0$ alors, d'après 1.a), C est la suite nulle. Elle est donc pseudo périodique.
  - On se place donc dans le cas où $q_0 \geqslant 1$ et on pose $p = q_0 - 1$.

$\Delta_p \neq 0$ donc les colonnes d'indices 0 à p de

$$\begin{pmatrix} c_0 & & c_p \\ & & \\ c_p & & c_{2p} \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Il en est donc de même des colonnes de.

$$\begin{pmatrix} c_0 & & c_p \\ & & \\ & & \\ c_{p+1} & & c_{2p} \end{pmatrix}$$

Mais puisque $\Delta_{p+1} = 0$, les colonnes de

$$\begin{pmatrix} c_0 & & c_{p+1} \\ & & \\ c_{p+1} & & c_{2p+2} \end{pmatrix}$$

sont liées. les $p+1$ premières formant une famille libre c'est donc la dernière qui est une combinaison linéaire des premières

$$\exists (\lambda_1, \quad \lambda_{p+1}) \in K^{p+1}$$

$$Col_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j \, Col_{p+1-j}$$

c'est à dire.

$$\forall j \in [p+1, 2p+2] \quad c_j = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \, c_{j-k}$$

ou mieux, pour garder les notations de l'énoncé.

$$\underline{\forall k \in [p+1, 2p+2] \quad c_k = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j \, c_{k-j}}$$

(Il aurait aussi été plus judicieux d'appeler p, celui qui est pour nous $p+1$, c'est-à-dire q_0. Nobody's perfect!)

Supposons maintenant que $n \geqslant 2p+3$ et que ~~pour~~

$$\forall k \in [p+1, n-1] \quad c_k = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j \, c_{k-j}$$

ce qui est vrai si $n = 2p+3$.

Si on prend $m = p$ et $p = p - 1$ (où p désigne temporairement notre p) dans la question précédente, on a $p \leq m+1$. $2m+2 \leq n$

$$\Delta_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{n-m-1} = 0$$

car $n - m - 1 = n - p - 1 \geq p + 1$

Par conséquent $C_n = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j C_{n-j}$

soit $\forall k \in [p+1, n]$ $C_k = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j C_{n-j}$

On a donc prouvé finalement

$\forall n \geq 2p+3$ $\forall k \in [p+1, n]$ $C_k = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j C_{n-j}$

par récurrence.

Donc $\forall k \geq p+1$ $C_k = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j C_{k-j}$

et C bien pseudo-périodique.

2a)

$F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et $Q(0) \neq 0$

On peut donc écrire $Q = c \prod_{j=1}^{q} (X - \alpha_j)$ où $c \neq 0$ et $q = \deg Q$. les α_j ne sont pas supposés distincts.

On peut supposer $q \geq 1$, sinon $F(z)$ est une fonction polynomiale, développable en série entière de rayon de convergence infini.

$Q(0) \neq 0$ donc $\forall j \quad \alpha_j \neq 0$.

$$F(z) = \frac{1}{c} R(z) \times \prod_{j=1} \frac{1}{z-\alpha_j}$$

Si $|z| < |\alpha_j|$ $\quad \frac{1}{z-\alpha_j} = \frac{-1}{\alpha_j} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^n z^n$

Donc $\frac{1}{z-\alpha_j}$ est développable en série entière, de rayon de convergence au moins égal à $|\alpha_j|$.

En effectuant le produit de Cauchy de séries entières on en déduit que $F(z)$ est développable en série entière, de rayon de convergence au moins égal à $R_0 = \min_{1 \leq j \leq q} |\alpha_j|$.

Si le rayon de convergence de cette série entière était strictement supérieur à R_0, F pourrait être prolongée en une fonction continue sur un disque $D(0,R)$, $R > R_0$

Or si $R_0 = |\alpha_{j_0}|$ on a $\lim_{\substack{z \to \alpha_{j_0} \\ |z| < R_0}} |F(z)| = +\infty$.

ce qui prouve que F ne peut pas être prolongée par continuité en α_0.

Ceci prouve que le rayon de convergence de cette série entière est bien R_0

Si $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ sur $\overline{D}(0,R_0)$ alors $c_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Or $F^{(n)} \in \mathbb{K}(X)$ donc $F^{(n)}(0) \in \mathbb{K}$ et $c_n \in \mathbb{K}$

2.b) Il existe donc une suite $C = (c_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall z \in D(0, R_0) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Ecrivons $Q(z) = \sum_{k=0}^{q} b_k z^k \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$, avec

$q = \deg Q$, $p = \deg P$ (Si $P = 0$, C est la suite nulle)

On a

$$\forall z \in D(0, R_0). \quad P(z) = F(z)\,Q(z)$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j c_{n-j} \right) z^n$$

avec la convention $b_j = 0$ si $j > q$

(cette écriture est licite car $P(z)$ et $Q(z)$ sont des séries entières de rayon de convergence au moins R_0)

Par unicité du développement en série entière.

$$\forall n \geq p+1 \qquad \sum_{j=0}^{n} b_j c_{n-j} = 0$$

puis

$$\forall n \geq \max(p+1, q) \qquad \sum_{j=0}^{\max(p,q)} b_j c_{n-j} = 0$$

Or $b_0 = Q(0) \neq 0$

$$\forall n \geq \max(p+1, q) = r \qquad c_n = \sum_{j=1}^{r} \left(-\frac{b_j}{b_0} \right) c_{n-j}$$

et $(c_n)_{n\geq 0}$ est bien pseudo périodique.

Rq On a

$$(*) \qquad c_n = a_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_0} c_{n-j}$$

on pourrait donc retrouver par récurrence le résultat de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \in \mathbb{K}$

3 a) $\lim\limits_{A\to+\infty} A^p - \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| A^{p-j} = +\infty$

Donc $\exists A_1 \ \forall A \geq A_1 \quad A^p - \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| A^{p-j} \geq 0.$

Il suffit de prendre $A_0 = \max(A_1, 1)$.

3.b) Soit $M = \max\left(A_0, \max\limits_{0\leq j\leq p-1} |C_j|\right)$

Alors $\forall j \in [0, p-1] \quad |C_j| \leq M^{(j+1)}$ (car $M \leq M^{(j+1)}$ puisque $M \geq 1$)

Supposons $n \geq p$ et $\forall j \in [0, n-1] \quad |C_j| \leq M^{j+1}$.

alors
$$|C_n| \leq \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| M^{n-j+1}$$
$$\leq M^{n-p+1} \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| M^{p-j}$$
$$\leq M^{n-p+1} M^p.$$
$$|C_n| \leq M^{n+1}.$$

On peut donc établir par récurrence.
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |C_n| \leq M^{n+1}$$

3c) Si $|x| \leq \frac{1}{M}$ $(C_n x^n)_{n\geq 0}$ est bornée, car
$$|C_n x^n| \leq M^{n+1} \times \frac{1}{M^n} = M.$$

D'après le lemme d'Abel le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est au moins égal à $\frac{1}{M}$.

Soit $Q = 1 - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j X^j = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, avec

$b_n = 0$ si $n \geqslant p+1$.

On peut effectuer le produit de Cauchy des séries entières $Q(x)$ et $S(x)$ sur $]-R, R[$.

$$\forall x \in]-R,R[\quad Q(x) S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j c_{n-j} \right) x^n.$$

Or $\forall n \geqslant p$ $\quad \sum_{j=0}^{n} b_j c_{n-j} = \sum_{j=0}^{p} b_j c_{n-j}$

$$= c_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_{n-j}$$

$$\forall n \geqslant p \quad \sum_{j=0}^{n} b_j . c_{n-j} . = 0$$

Par conséquent $\underline{Q(x) S(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{p} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j c_{n-j} \right) x^n}$.

et $\forall x \in]-R,R[\quad S(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $Q(0) \neq 0$.

On peut de plus supposer P et Q premiers entre eux, quitte à diviser par leur P.G.C.D. (On conservera $Q(0) \neq 0$))

<u>Il y a unicité de la fraction</u>, car si

$\forall x \in]-R,R[\quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ on aura

$\forall x \in]-R,R[\quad P(x) Q_1(x) = P_1(x) Q(x)$.

<u>et $]-R, R[$ est infini</u>, donc.

$$P Q_1 = P_1 Q \quad \text{dans } \mathbb{K}[X]$$

et $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ dans $\mathbb{K}(X)$

4 a) Ecrivons $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec les notations de la question 2a) et ~~les~~ relations ~~obtes~~ (*) obtenue à la fin de la question, on peut écrire.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j c_{n-j}$ car $\underline{b_0 = 1 = Q(0)}$

où les a_n et les b_j sont dans $\mathbb{Z}$.

Or on déduit par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \in \mathbb{Z}$

4b) $Q = 1 - 5X + 6X^2$.

$Q(x) f(x) = P(x)$.

$(1 - 5x + 6x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = P(x)$

$c_0 + (c_1 - 5c_0) x + \sum_{n=2}^{+\infty} (c_n - 5c_{n-1} + 6c_{n-2}) x^n = P(x)$

donc $P(x) = c_0 + (c_1 - 5c_0) x$.

$f(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 5c_0) x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{c_0 + (c_1 - 5c_0) x}{(1-2x)(1-3x)}$.

Si $P(\frac{1}{2}) \neq 0$ $P(\frac{1}{3}) \neq 0$ alors $\frac{P}{Q} = \frac{c_0 + (c_1 - 5c_0) X}{1 - 5X + 6X^2}$.

Si $P(\frac{1}{2}) = 0$ $(c_1 = 3c_0)$ $\frac{P}{Q} = \frac{c_0}{1 - 3X}$

Si $P(\frac{1}{3}) = 0$ $(c_1 = 2c_0)$ $\frac{P}{Q} = \frac{c_0}{1 - 2X}$.

(Il y a aussi le cas particulier $c_0 = 0$

Deuxième partie.

5) Si $|\theta| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(\theta) = 0$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Si $|\theta| < 1$ $0 \leq U_n(\theta) = |\sin(\theta^n \pi)| \leq |\theta|^n \pi$

Or $\sum_{n \geq 0} |\theta|^n \pi$ converge (vers $\frac{\pi}{1-|\theta|}$), donc $\sum_{n \geq 0} U_n(\theta)$ converge

6a) $P = a \prod_{i=1}^{N} (X - r_i)$

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x - r_i} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r_i^{n+1}} x^n \qquad \text{si } |x| < \min|r_i|$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-S_{n+1}) x^n.$$

Or $P(0) = 1$ $P \in \mathbb{Z}[X]$ $P' \in \mathbb{Z}[X]$

D'après le résultat admis à la question 4 : $\forall n \in \mathbb{N}$ $-S_{n+1} \in \mathbb{Z}$

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \in \mathbb{Z}$, de plus $S_0 = N \in \mathbb{Z}$

6b) $S_n = \theta^n + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{r_k^n}$, donc $\theta^n = S_n + \varepsilon_n$

avec $\varepsilon_n = \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{r_k}\right)^n$

Puisque $\forall k \geq 2$ $\left|\frac{1}{r_k}\right| < 1$ on a bien $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Plus précisément $|\varepsilon_n| \leq \sum_{k=2}^{N} \left|\frac{1}{r_k}\right|^n$ et pour tout

$k \geq 2$ $\sum_{n \geq 0} \left|\frac{1}{r_k}\right|^n$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n$ est absolument convergente

Or $0 \leq U_n(\theta) \leq |\sin(S_n \pi + \varepsilon_n \pi)| = |(-1)^N \sin(\varepsilon_n \pi)| \leq |\varepsilon_n| \pi$

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n(\theta)$ converge

7α) La suite orthonormale $(z_1, \ldots, z_n)$ obtenue par le procédé de Schmidt est telle que.

$$\forall k \in [1, n] \quad x_k \in \text{Vect}\{(z_1, \ldots, z_k)\}$$

Or l'écriture unique de x_k sur la famille $(z_1, \ldots, z_n)$, qui est une base orthonormale de E, est : $x_k = \sum_{i=1}^{n} (z_i | x_k) z_i$

On donc $\forall k \in [1, n] \quad x_k = \sum_{i=1}^{k} (z_i | x_k) z_i$

La matrice de passage de la base $(z_1, \ldots, z_n)$ à la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $(z_k | x_k)$.

On a

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(z_1, \ldots, z_n) \prod_{k=1}^{n} (x_k | z_k)$$

7β) On a donc.

$$|\det(x_1, \ldots, x_n)| = |\det(z_1, \ldots, z_n)| \prod_{k=1}^{n} |(x_k | z_k)|$$

Or $(z_1, \ldots, z_n)$ est orthonormale et $\mathcal{B}$ aussi

donc $\det(z_1, \ldots, z_n) = \pm 1$

De plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski

$$\forall k \quad |(x_k | z_k)| \leq \|x_k\| \, \|z_k\| = \|x_k\|.$$

On a donc bien.

$$|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

8a) - $\sum_{n\geq 0} \theta^n x^n$ converge si et seulement si $|\theta x| < 1$

On a donc $R_W = \frac{1}{|\theta|}$

- $c_n \sim \theta^n$ donc $R_U = R_W = \frac{1}{|\theta|}$.

- $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est bornée (par exemple parce que $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$)

donc $R_V \geq 1$

8b) $c_n = \theta^n - \varepsilon_n$ donc $d_n = \theta\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ et $|d_n| \leq |\theta||\varepsilon_{n-1}| + |\varepsilon_n|$

Or les séries $\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n|$ et $\sum_{n\geq 1} |\varepsilon_{n-1}|$ convergent donc.

$\sum_{n\geq 1} |d_n|$ converge. $\sum_{n\geq 1} d_n$ est absolument convergente

(donc convergente).

En particulier $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$, donc $0 \leq d_n^2 = o(|d_n|)$

et par conséquent $\sum_{n\geq 1} d_n^2$ converge (car $(|d_n|)_{n\geq 0}$ est positive)

8c) On applique l'inégalité de Hadamard au déterminant Δ_n. On obtient

$$\cancel{\Delta_n^2 \leq \prod_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{k+n} c_i^2 \right)}$$ (Inexploitable)

On effectue d'abord sur Δ_n l'opération qui consiste à soustraire à la colonne d'indice k, $1 \leq k \leq n$ la colonne d'indice $k-1$ multipliée par θ. k décroissant de n à 1. On ne change pas la valeur du déterminant, mais on change les c_i en d_i sauf sur la première colonne. Hadamard donne alors

$$\Delta_n^2 \leq \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \times \prod_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{k+n} d_i^2 .$$

Or $\forall k \quad \underline{\sum_{i=k}^{k+n} d_i^2 \leq \sum_{i=k}^{+\infty} d_i^2 = P_k}$

et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \theta^{2i} - 2\varepsilon_i\theta^i + \varepsilon_i^2$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \theta^{2i} + \theta^i + \frac{1}{4}$$

$$\leq \theta^{2n}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\theta^{2(n-i)}} + \frac{1}{\theta^{2n-i}} + \frac{1}{4\theta^{2n}}\right)$$

$$\leq \theta^{2n}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\theta^{2i}} + \frac{1}{\theta^{n+i}} + \frac{1}{4\theta^{2n}}\right)$$

$$\leq \theta^{2n}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\theta^{2i}} + \frac{1}{\theta^{2i}} + \frac{1}{4\theta^{2i}}\right)$$

$$\leq \theta^{2n} \times \left(2+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{\theta^2}} \leq \frac{9}{4}\frac{\theta^2}{\theta^2-1}\cdot\theta^{2n}.$$

$\underline{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i^2 \leq K\theta^{2n}}$ (D'autres majorations, même non effectives étaient possibles)

- On a $\Delta_n^2 \leq K\,\theta^{2n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n} P_k = K\prod_{k=1}^{n}(\theta^2 P_k)$

Or $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \theta^2 P_k = 0$, donc $\exists\, n_0 \;\forall k \geq n_0 \;\; \theta^2 P_k \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \geq n_0 \qquad 0 \leq \Delta_n^2 \leq K\displaystyle\prod_{k=1}^{n_0-1}(\theta^2 P_k) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$

et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Delta_n^2 = 0.$ $\quad \underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0}$

- Or $\Delta_n \in \mathbb{Z}$ car les c_i sont dans $\mathbb{Z}$, et il existe p tel que $\forall n \geq p \;|\Delta_n| \leq \frac{1}{2}$. Donc $\underline{\forall n \geq p \;\; \Delta_n = 0}$

8d) Puisque Δ_n est nul pour n assez grand.
il résulte du résultat de la première partie que
$\sum_n$ U est une fraction rationnelle.

Or $W(x) = \dfrac{1}{1-\theta x}$ pour $x \in]-\frac{1}{|\theta|}, \frac{1}{|\theta|}[$.

Donc W est aussi une fraction rationnelle.

Or $\forall x \in]-\frac{1}{|\theta|}, \frac{1}{|\theta|}[$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n x^n = W(x) - U(x)$

Donc $V_{|]-\frac{1}{|\theta|}, \frac{1}{|\theta|}[}$ est une fraction rationnelle.

La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc pseudo-périodique.
donc V est aussi une fraction rationnelle sur $D(0, R_V)$.

Or $R_V \geq 1$ ~~donc~~ et $\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n|$ converge donc
$\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur
$\overline{D(0,1)} = \{z, |z| \leq 1\}$, V est donc une fraction rationnelle sur $D(0,1)$ prolongeable par continuité à $\overline{D(0,1)}$.

Or l'argument vu en 2.a) montre que cela n'est pas possible si V possède un pôle de module 1.

V ne possède pas de pôle de module 1 ni de module strictement inférieur à 1, car V est continue sur $\overline{D(0,1)}$.

Or $R_V = \min\{|\alpha|, \alpha \text{ pôle de } V\}$ donc $\underline{R_V > 1}$.

8.e) $U(x) = W(x) - V(x)$ si $|x| < \frac{1}{|\theta|}$

W et V sont des fractions rationnelles

$W(x) = \frac{1}{1-\theta x}$ $\quad V = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ avec $Q(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| > 1$.

Donc $U(x) = \frac{Q_1(x) - (1-\theta x) P_1(x)}{(1-\theta x)\, Q_1(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Puisque le développement de U est à coefficients entiers on peut supposer que <u>P et Q sont à coefficients entiers</u> avec $Q(0) = 1$.

La série $\sum c_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{|\theta|}$ donc U possède un pôle de module $\frac{1}{|\theta|}$ qui doit être un zéro de Q. Ce ne peut être que $\frac{1}{\theta}$.

Ensuite Q divise $(1-\theta X)\, Q_1$ donc les autres pôles de U sont racines de Q_1 et donc de module strictement supérieur à 1.

. <u>En conclusion</u> $\frac{1}{\theta}$ est racine de Q qui est à coefficients entiers, vérifie $Q(0) = 1$ et toutes les autres racines sont de module strictement ~~inférieur~~ à 1.

– En considérant $\tilde{Q} = X^{\deg(Q)}\, Q\left(\frac{1}{X}\right)$ on a déduit que θ est l'unique racine de module strictement supérieur à 1 d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les autres racines sont de module strictement inférieur à 1. Un tel nombre s'appelle un nombre de Pisot.